Available online at www.sciencedirect.com

SCIENCE DIRECT®

C. R. Mecanique 331 (2003) 431–436

COMPTES RENDUS MECANIQUE

Effet de l'orientation d'un champ magnétique horizontal sur la stabilité de l'écoulement de Hadley

Slim Kaddeche [a,∗], Adel Gharbi [b], Daniel Henry [c], Hamda Ben Hadid [c], Taïeb Lili [b]

[a] *Institut national des sciences appliquées et de technologie, INSAT, BP 676, 1080 Tunis cedex, Tunisie*
[b] *Laboratoire de mécanique des fluides, faculté des sciences de Tunis, 1060 Tunis cedex, Belvédère, Tunisie*
[c] *Laboratoire de mécanique des fluides et d'acoustique, UMR-CNRS 5509, École centrale de Lyon, Université Claude Bernard, BP 163, 69131 Ecully cedex, France*

Reçu et accepté le 2 avril 2003

Présenté par René Moreau

Résumé

Une étude numérique basée sur la théorie linéaire de stabilité est menée afin de déterminer l'influence d'un champ magnétique horizontal sur les modes marginaux se développant dans une couche fluide soumise à un gradient de température horizontal. Un intérêt particulier est porté sur l'influence de l'orientation du champ magnétique sur la nature et les valeurs des seuils critiques des modes instables. Les calculs montrent, que lorsqu'il est soumis à un champ magnétique incliné dans le plan horizontal, ce type d'écoulement dit de Hadley, peut présenter des ondes obliques, jusqu'alors inexistantes aussi bien lorsqu'aucun champ magnétique n'est appliqué que pour des champs magnétiques verticaux, transversaux ou longitudinaux. Il en est de même pour l'effet stabilisant qui connaît un comportement asymptotique inédit. ***Pour citer cet article : S. Kaddeche et al., C. R. Mecanique 331 (2003).***

Abstract

Effet of the orientation of a horizontal magnetic field on the stability of Hadley flow. A numerical study based on the linear stability analysis is undertaken, in order to determine the influence of a horizontal magnetic field on the marginal modes occuring in a fluid layer subjected to a horizontal temperature gradient. A particular interest is devoted to the influence of the magnetic field orientation on both nature and critical values of the unstable modes. Calculations show, that when it is subjected to such a magnetic field, this type of flow, known as Hadley flow, can present oblique waves, hitherto non-existent when no magnetic field is applied and even when a vertical, a transverse or a longitudinal magnetic field is imposed. A new asymptotic behavior is also observed for the stabilizing effects. ***To cite this article: S. Kaddeche et al., C. R. Mecanique 331 (2003).***

Mots-clés : Mécanique des fluides ; Magnétohydrodynamique ; Stabilité

Keywords: Fluid mechanics; Magnetohydrodynamics; Stability

∗ Auteur correspondant.
Adresses e-mail : slimkaddeche@yahoo.fr (S. Kaddeche), henry@mecaflu.ec-lyon.fr (D. Henry).

1631-0721/03/$ – see front matter
doi:10.1016/S1631-0721(03)00094-9

Abridged English version

Introduction

The effects of a vertical, transverse or longitudinal constant magnetic field on the stability of buoyant convection occuring in conducting fluids are well identified on both transverse and longitudinal modes which are likely to appear in a fluid layer subject to a horizontal temperature gradient [1]. Unfortunately, it seems that no particular attention has been devoted to investigate the effects of the orientation of a horizontal magnetic field on such instabilities. In the present study, we investigate by means of numerical calculations the effect of such horizontal magnetic fields on these two types of instability which are the only ones suscecptible to occur in a buoyant convection flow, such as recently proved by Kaddeche et al. [1], who confirm that no oblique wave can exist, contrary to the thermocapillary flows where oblique waves are generally the most unstable disturbances in both cases corresponding to the situations with or without an applied magnetic field (e.g., [2,3]).

Results

The conducted numerical simulations (Fig. 1) show that for weak Prandtl numbers, the effect of the magnetic field on the so called transverse instabilities consists in two simultaneous actions: orientation and stabilization (Figs. 2–3). The orientation effect consists in changing the direction of the unstable rolls which become oblique modes, whereas they were transversal when no magnetic field is applied. When increasing the magnetic field strength, we observe a progressive alignment of the marginal cell axis with the field direction. The stabilizing effect is also characteristic of this particular situation. Indeed, the increase of the threshold values of the critical Grashof numbers will be carried out in two stages. During the first stage, the critical Grashof number increases with the magnetic field strength, then, this threshold value remains almost constant, as soon as the marginal roll axis and the magnetic field direction become almost parallel. These results related to both stabilization and orientation of the initially transverse modes are found to be directly connected to the values of the magnetic field orientation angle (Figs. 2–3) and the Prandtl number (Fig. 4). Indeed, the more such an angle is close to 90°, the more the magnetic field strength needed to reach the asymptotic behaviours related to the values of the critical Grashof numbers and to the alignment of the marginal cell axis with the magnetic field direction is weak. Another feature consists in remarking that the stabilizing effect is more significant for the moderate values of the magnetic field orientation angle. Such a horizontal magnetic field has the same effects on the second type of instabilities, referred as longitudinal modes.

1. Introduction

L’influence d’un champ magnétique sur la stabilisation des écoulements de Hadley fut étudiée par Kaddeche et al. [1]. De ces travaux, il en ressort qu’un champ magnétique vertical retarde l’apparition des deux types d’instabilités susceptibles de se développer pour ce type d’écoulement. Pour un champ magnétique longitudinal, la stabilisation n’affecte que les modes transversaux, alors que le champ transversal ne stabilise que les modes longitudinaux. Un des résultats marquants constatés lors de ces études, réside dans le fait que la stabilisation par champ magnétique constant, conservait généralement la nature transversale ou longitudinale de l’instabilité de départ. Par conséquent, aucun mode oblique ne fut observé, que ce soit avec ou sans application d’un champ magnétique, alors que pour les écoulements thermocapillaires, Priede et Gerbeth [2,3] ont prouvé que les modes obliques sont généralement les plus instables. Le but de cette étude consiste à déterminer l’effet de l’orientation d’un champ magnétique horizontal sur la stabilité de l’écoulement de Hadley, et notamment, à détecter la présence éventuelle de modes obliques.

2. Modèle mathématique

Notre étude repose sur l'élaboration d'un code de calcul numérique, basé sur la théorie linéaire de stabilité, qui consiste à suivre l'évolution d'une perturbation infinitésimale $(\vec{v}, p, \theta, \phi)$ des champs respectifs de vitesse, de pression, de température, et de potentiel électrique. L'évolution de ces grandeurs est gouvernée par le système d'équations linéarisées, constitué par les équations de Navier Stokes d'un fluide newtonien soumis à un gradient de température horizontal $\nabla\widetilde{T}$ et obéissant à la loi de Boussinesq : $\rho = \rho_0(1 - \beta(T - T_0))$, couplées à l'équation de conservation de l'énergie et de la charge. D'après Moreau [4], les nombres de Reynolds magnétiques sont suffisamment petits pour les métaux liquides lors d'expériences MHD en laboratoire, nous permettant de négliger le champ magnétique induit $\vec{b}$ devant le champ extérieur $\vec{B}_0$. En utilisant les grandeurs de référence H, H^2/ν, ν/H, $\varrho_0\nu^2/H^2$, $\nabla\widetilde{T}H$, νB_0, et $\sigma_e\nu B_0/H$ respectivement pour les longueurs, le temps, la vitesse, la pression, la température, le potentiel électrique, et le courant, ce système d'équations normalisées s'écrira :

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{V}_0\cdot\vec{\nabla})\vec{v} + (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{V}_0 = -\vec{\nabla}p + \nabla^2\vec{v} + Gr\,\theta\vec{e}_z + Ha^2\vec{j}\times\vec{e}_{B_0} \tag{1}$$

$$\nabla\cdot\vec{v} = 0 \tag{2}$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} + \vec{V}_0\cdot\vec{\nabla}\theta + \vec{v}\cdot\vec{\nabla}T_0 = \frac{1}{Pr}\nabla^2\theta \tag{3}$$

$$\nabla^2\phi = \vec{e}_{B_0}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{v}) \tag{4}$$

$$\vec{j} = -\vec{\nabla}\phi + \vec{v}\times\vec{e}_{B_0} \quad \text{et} \quad \vec{e}_{B_0} = \frac{\vec{B}_0}{B_0} = \cos\alpha\vec{e}_x + \sin\alpha\vec{e}_y \tag{5}$$

où les nombres sans dimension $Gr = g\beta\nabla\widetilde{T}H^4/\nu^2$, $Pr = \nu/\kappa$ et $Ha = B_0H\sqrt{\sigma_e/\varrho_0\nu}$, désignent respectivement les nombres de Grashof, de Prandtl et de Hartmann. La perturbation infinitésimale $(\vec{v}, p, \theta, \phi)$ est superposée à l'écoulement de base $(\vec{V}_0, P_0, T_0, \Phi_0)$ solution du problème stationnaire où :

$$\vec{V}_0 = \vec{V}_0(z) = \frac{Gr}{24}(4z^3 - z)\vec{e}_x$$

$$T_0 = T_0(x, z) = x + \frac{Gr\,Pr}{5760}(48z^5 - 40z^3 + 15z)$$

La perturbation $(\vec{v}, p, \theta, \phi)$ est considérée comme une onde plane

$$(\vec{v}, p, \theta, \phi) = (\overrightarrow{v(z)}, p(z), \theta(z), \phi(z))\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(hx+ky)+\omega t}$$

où h et k sont les nombres d'onde selon la direction transversale et londitudinale et ω la pulsation complexe. Le système d'Éqs. (1)–(4) est discrétisé en utilisant la méthode spectrale de TAU faisant appel aux polynômes de Chebyshev comme fonctions de base. Les différentes composantes des perturbations fonctions de z sont donc décomposées sur un nombre de polynômes de Chebyshev pourvant atteindre la centaine. Dans ces conditions, le système d'Éqs. (1)–(4) se ramène à un système aux valeurs propres : $L(Gr, Pr, Ha, \alpha, h, k)X = \omega MX$ où $L(Gr, Pr, Ha, \alpha, h, k)$ est un opérateur linéaire dépendant de Gr, Pr, Ha, α, h et k, M est un opérateur linéaire constant et $X = (\overrightarrow{v(z)}, p(z), \theta(z), \phi(z))$. On définit le nombre de Grashof critique, noté Gr_c, au delà duquel l'écoulement de base perd sa stabilité, comme : $Gr_c = \mathrm{Inf}_{(h,k)\in\Re^2}Gr_0(Pr, Ha, \alpha, h, k)$ où Gr_0 est la valeur de Gr correspondant au cas où la valeur propre associée à l'opérateur $L(Gr, Pr, Ha, \alpha, h, k)$ admet une partie réelle nulle.

3. Résultats

L'essentiel de notre étude sera consacré à déterminer l'influence de l'intensité et de l'orientation d'un champ magnétique horizontal constant sur les deux types d'instabilités susceptibles d'apparaître au sein d'une couche fluide électriquement conductrice et soumise à un gradient de température horizontal (cf. Fig. 1). La couche fluide

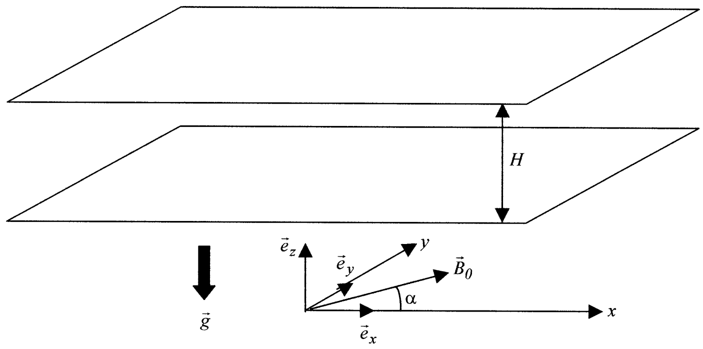

Fig. 1. Représentation de la configuration étudiée.

Fig. 1. The configuration studied.

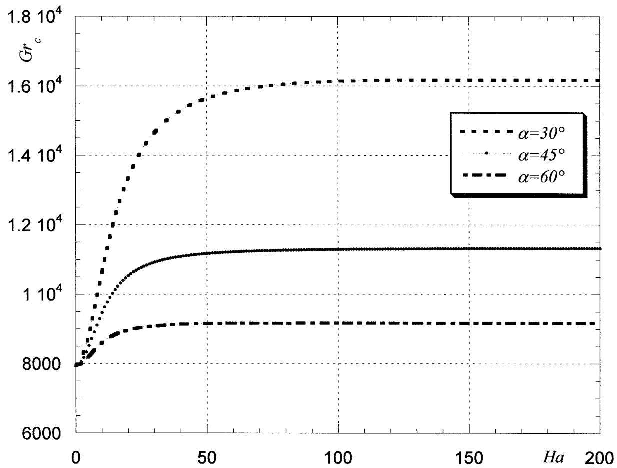

Fig. 2. Variation de Gr_c pour $Pr = 0{,}001$ et différentes valeurs de α.

Fig. 2. Variation of Gr_c for $Pr = 0.001$ and different values of α.

est uniquement confinée dans la direction verticale par deux plans horizontaux thermiquement adiabatiques et électriquement isolants. En partant d'une instabilité transversale aussi appelée mode 2D ($h \neq 0$, $k = 0$), qui se manifeste essentiellement pour les petits nombres de Prandtl (jusqu'à $Pr = 0{,}034$ pour $Ha = 0$), on constate, que l'application d'un champ magnétique faisant un angle $0° \prec \alpha \prec 90°$ avec l'axe (Ox), va avoir deux actions différentes, mais simultanées sur de tels modes 2D : un effet de stabilisation, mais aussi un effet d'orientation qui va transformer l'instabilité initialement transversale et stationnaire pour $Ha = 0$ en une instabilité oblique, mais dont le caractère stationnaire est préservé pour $Ha \neq 0$. On constate d'après la Fig. 2, illustrant la variation de Gr_c en fonction de Ha pour $Pr = 0{,}001$ et différentes valeurs de α, que l'application d'un champ magnétique incliné dans le plan horizontal (xOy) va stabiliser l'écoulement en augmentant les valeurs du Grashof critique de transition Gr_c, et ce, jusqu'à une valeur asymptotique constante $Gr_{c,\mathrm{lim}}$ atteinte dès lors que Ha devient supérieur à une valeur limite qu'on désignera par Ha_{lim}. D'après cette même Fig. 2, on voit que l'effet de stabilisation du champ magnétique devient de plus en plus significatif pour des valeurs décroissantes de α. A titre d'exemple, pour $Pr = 0.001$, $Gr_{c,\mathrm{lim}}(\alpha = 30°) = 16170$, $Gr_{c,\mathrm{lim}}(\alpha = 45°) = 11340$ et $Gr_{c,\mathrm{lim}}(\alpha = 60°) = 9170$. Cet effet est maximal pour $\alpha = 0°$, si bien que Gr_c croit proportionnellement avec Ha et n'atteint jamais de valeur limite, alors qu'il est nul pour $\alpha = 90°$, où aucun effet de stabilisation n'est constaté, et ce, à cause de l'annulation du courant

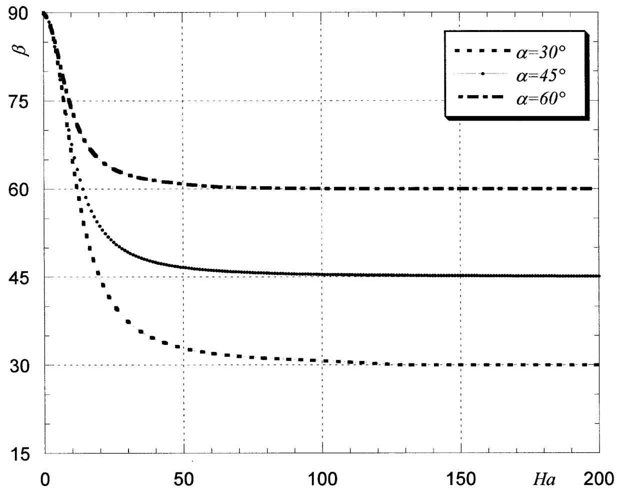

Fig. 3. Variation de β pour $Pr = 0{,}001$ et différentes valeurs de α.
Fig. 3. Variation of β for $Pr = 0.001$ and different values of α.

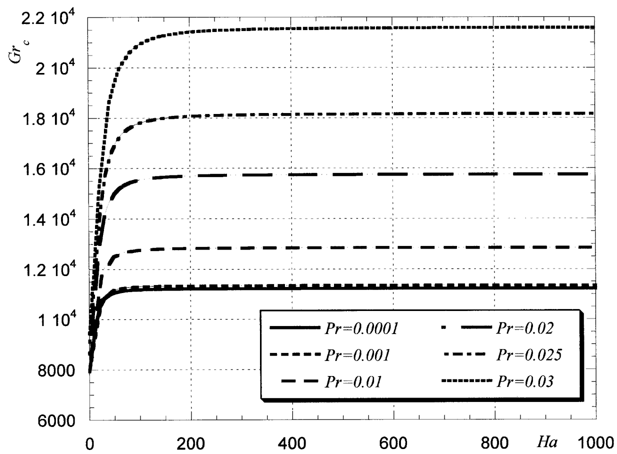

Fig. 4. Variation de Gr_c pour $\alpha = 45°$ et différentes valeurs de Pr.
Fig. 4. Variation of Gr_c for $\alpha = 45°$ and different values of Pr.

$\vec{j}$ qui est à l'origine même du processus de stabilisation. L'autre effet spécifique à l'action d'un champ magnétique horizontal d'orientation $0° \prec \alpha \prec 90°$ sur les modes 2D, consiste à transformer la nature de l'instabilité, qui pour $Ha = 0$, était transversale ($h \neq 0$, $k = 0$) en une instabilité oblique ($h \neq 0$, $k \neq 0$). En effet, on constate sur la Fig. 3 que l'angle $\beta = \frac{\pi}{2} + \arctan(\frac{k}{h})$ que fait l'axe des rouleaux marginaux avec (Ox) va décroître de 90° pour $Ha = 0$ à α pour $Ha \succeq Ha_{\mathrm{lim}}$. Autrement dit, le mode de départ qui consistait en un rouleau d'axe (Oy), va s'incliner progressivement, pour devenir à partir de $Ha \succeq Ha_{\mathrm{lim}}$ quasiment parallèle à la direction du champ magnétique $\vec{B}_0$. Ce résultat explique le comportement asymptotique de Gr_c décrit précédemment. En effet, dès que le champ magnétique aligne l'axe des rouleaux marginaux sur sa propre direction, son effet de stabilisation cesse, et ce, suite à l'annulation du courant $\vec{j}$ qui est à l'origine du processus de stabilisation. Quant à l'influence du nombre de Prandtl, on constate pour une valeur donnée de α que $Gr_{c,\mathrm{lim}}$ croît avec Pr comme indiqué sur la Fig. 4 pour $\alpha = 45°$, sur laquelle on relève les valeurs suivantes pour $Gr_{c,\mathrm{lim}}$: $Gr_{c,\mathrm{lim}}(Pr = 0{,}0001) = 11230$, $Gr_{c,\mathrm{lim}}(Pr = 0{,}001) = 11340$, $Gr_{c,\mathrm{lim}}(Pr = 0{,}01) = 12850$ et $Gr_{c,\mathrm{lim}}(Pr = 0{,}03) = 21590$.

L'effet de l'orientation d'un champ magnétique horizontal a aussi été étudié numériquement pour les modes longitudinaux ($h = 0$, $k \neq 0$). Des comportements similaires à ceux décrits précédemment pour les modes transversaux ont été observés, à savoir, qu'après une phase où le champ magnétique stabilise et oriente simultanément les rouleaux marginaux, son effet de stabilisation cesse dès lors que la direction de l'axe du rouleau marginal devient parallèle à celle du champ magnétique.

4. Conclusion

Cette étude consacrée à l'effet de l'orientation d'un champ magnétique horizontal sur les instabilités susceptibles d'apparaître au sein d'une couche fluide électriquement conductrice, soumise à un gradient de température horizontal et située entre deux plans horizontaux thermiquement adiabatiques et électriquement isolants a mis en exergue des comportements originaux aussi bien pour le processus de stabilisation que pour le changement de nature des modes instables qui deviennent obliques pour $0° \prec \alpha \prec 90°$. En effet, pour de tels écoulements, jamais un mode oblique n'a été mis à jour, ni pour $Ha = 0$, ni pour $Ha \neq 0$ pour des champs magnétiques verticaux, transversaux ($\alpha = 90°$) ou longitudinaux ($\alpha = 0°$) [1]. Par ailleurs, pour $0° \prec \alpha \prec 90°$, le champ magnétique horizontal stabilise les deux modes 2D et 3D, contrairement aux champs transversaux et longitudinaux qui ne stabilisent que le mode dont l'axe du rouleau marginal leur est orthogonal. Il a aussi été prouvé, pour $0° \prec \alpha \prec 90°$, que l'effet de stabilisation de tels champs est caractérisé par un effet asymptotique spécifique qui se traduit par l'existence d'une valeur limite que le nombre de Grashof critique ne peut dépasser. Cette valeur limite de Gr_c qui dépend de α et Pr est atteinte dès lors que l'axe du rouleau marginal s'aligne sur la direction du champ magnétique.

Références

[1] S. Kaddeche, D. Henry, H. Ben Hadid, Magnetic stabilization of the buoyant convection between infinite horizontal walls with a horizontal temperature gradient, J. Fluid Mech. 480 (2003) 185–216.
[2] J. Priede, G. Gerbeth, Hydrothermal wave instability of thermocapillary-driven convection in a coplanar magnetic field, J. Fluid Mech. 347 (1997) 141–169.
[3] J. Priede, G. Gerbeth, Hydrothermal wave instability of thermocapillary-driven convection in a transverse magnetic field, J. Fluid Mech. 404 (2000) 211–250.
[4] R. Moreau, Magnetohydrodynamics, Kluwer Academic, 1990.