



## Effet d'un champ magnétique transversal sur la stabilité de l'écoulement de Hartmann : les modes tridimensionnels

Maher Jédidi <sup>a</sup>, Slim Kaddeche <sup>a,\*</sup>, Ali Abdennadher <sup>a</sup>, Adel Gharbi <sup>b</sup>,  
Daniel Henry <sup>c</sup>, Hamda Ben Hadid <sup>c</sup>

<sup>a</sup> *Institut national des sciences appliquées et de technologie, INSAT, B.P. 676, 1080 Tunis cedex, Tunisie*

<sup>b</sup> *Laboratoire de mécanique des fluides, faculté des sciences de Tunis, 1060 Tunis cedex, Belvédère, Tunisie*

<sup>c</sup> *Laboratoire de mécanique des fluides et d'acoustique, UMR-CNRS 5509, école centrale de Lyon, université Claude Bernard, B.P. 163, 69131 Ecully cedex, France*

Reçu le 4 janvier 2005 ; accepté après révision le 15 février 2005

Disponible sur Internet le 23 mars 2005

Présenté par René Moreau

---

### Résumé

Une étude numérique est menée afin de déterminer l'influence d'un champ magnétique transversal sur les instabilités tridimensionnelles de l'écoulement de Hartmann. On montre que la transformation de Squire utilisée pour caractériser de telles instabilités ne donne des résultats satisfaisants que dans les cas où  $Ha$  est petit et où les modes 3D sont peu déviés par rapport aux modes 2D. Une telle étude est motivée par le fait que les instabilités 2D n'expliquent pas toujours avec succès les observations expérimentales relatives au phénomène de transition. **Pour citer cet article :** *M. Jédidi et al., C. R. Mecanique 333 (2005).*

© 2005 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

### Abstract

**Effect of a transverse magnetic field on the stability of Hartman flow: three-dimensional instabilities.** A numerical study is conducted in order to determine the influence of a transverse magnetic field on the three-dimensional instabilities of the Hartmann flow. We prove that the Squire transformation currently used to characterize such instabilities give satisfactory results only in the case where  $Ha$  is weak and 3D modes are slightly deviated from the 2D modes. Such a study is justified by the fact that the two-dimensional instabilities could not always explain successfully the experimental observations relating to the transition phenomenon. **To cite this article:** *M. Jédidi et al., C. R. Mecanique 333 (2005).*

© 2005 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

*Mots-clés :* Mécanique des fluides ; Magnétohydrodynamique ; Stabilité

*Keywords :* Fluid mechanics ; Magnetohydrodynamics ; Stability

---

\* Corresponding author.

Adresse e-mail : [slimkaddeche@yahoo.fr](mailto:slimkaddeche@yahoo.fr) (S. Kaddeche).

## Abridged English version

### Introduction

The influence of a transverse magnetic field on the two-dimensional instability of the Hartmann flow was initiated by the analytical work of Lock [1], followed by the investigations of Potter et al. [2] and more recently by Takashima [3] who used a numerical method to determine the critical thresholds by means of a linear stability analysis. In addition, Takashima [3] generalized the work of Lock [1] by including the effect of the magnetic Prandtl number on the thresholds and made corrections to work of Potter et al. [2]. From [1] and [3], for the small magnetic Prandtl numbers, it appears mainly, that a transverse magnetic field delayed considerably the appearance of two-dimensional instabilities, known as of Tollmien–Schlichting waves, which are the first to develop for a Hartmann flow. The three-dimensional instabilities thresholds, which are rarely taken into account by the literature, in particular in the presence of a magnetic field, are usually derived from the Tollmien–Schlichting ones by the means of the Squire transformation. During this work, we prove that such a transformation gives only approximate results and that a more general approach, which would take into account the global three-dimensional character of the instabilities in the treatment of the problem, without having recourse to the Squire transformation, as that is often the case, is necessary if one wishes to obtain better results in term of precision. The search for such a precision for three-dimensional instabilities is justified by their significant importance in the comprehension of the experimental observations of the phenomenon of transition towards turbulence for the plane Poiseuille flow [5]. Thus, the aim of this study is to determine, for a given value of the applied magnetic field strength, the critical thresholds for the three-dimensional instabilities as a function of the angle between their wave front and stream direction and to have an estimate of the error if such thresholds were obtained by the means of the Squire transformation.

### Results

The conducted numerical simulations show that the magnetic field have a stabilizing effect on both two- and three-dimensional instabilities occurring in the Hartmann flow as illustrated in Fig. 1. For the case of two-dimensional instabilities, our results are in excellent agreement with those of Takashima [3]. Thus, for  $Re_c$  by example, the maximum discrepancy does not exceed 0.35% for  $Ha = 5$ . Nevertheless, one can see on Fig. 2, that the Squire transformation can be used successfully only if the considered 3D modes are slightly deviated from the 2D ones, especially when the Hartmann number is significant. Indeed, one can note on the Fig. 2, that the results obtained from the Squire transformation are affected by a discrepancy of 33% for  $Ha = 0$  and 45% for  $Ha = 5$  when  $\alpha$  is close to  $90^\circ$ , whereas the error never exceeds 10% when  $\alpha \lesssim 60^\circ$  for  $Ha \lesssim 5$ . One can notice on Fig. 3, that the size of the convective cells shrinks when  $\alpha$  is increased for a given value of  $Ha$ . We can remark that this decrease in the cells size is more pronounced when  $Ha$  is increased. We can also note for  $\alpha \gtrsim 80^\circ$ , that the convective cell size reaches a constant value which depends only on  $Ha$ . On Fig. 4, illustrating the variation of the wave speed, one can notice that  $c_c$  decreases with increasing values of  $\alpha$  for  $Ha \lesssim 5$ .

## 1. Introduction

L'influence d'un champ magnétique transversal sur les instabilités bidimensionnelles de l'écoulement de Hartmann fut d'abord étudiée analytiquement par Lock [1], par Potter et al. [2], et plus récemment par Takashima [3] qui a utilisé une méthode numérique pour déterminer la valeur des seuils critiques en se basant sur la théorie linéaire de la stabilité. Par ailleurs, Takashima [3] a généralisé les travaux de Lock [1] en intégrant l'effet du nombre de Prandtl magnétique sur les seuils instables et a apporté des corrections aux travaux de Potter et al. [2]. Des travaux [1] et [3], il en ressort principalement, pour les petits nombres de Prandtl magnétique, qu'un champ magnétique transversal retardait considérablement l'apparition des instabilités bidimensionnelles, dites de Tollmien–Schlichting, qui il est

vrai, sont les premières à se développer pour un écoulement de Hartmann. Concernant les instabilités tridimensionnelles, qui n’ont été que très peu abordées par la littérature, notamment en présence d’un champ magnétique, elles se déduisaient habituellement à partir des modes bidimensionnels par le biais de la transformation de Squire. Lors de ce travail, on démontre qu’une telle transformation ne donne que des résultats approchés et qu’une étude plus générale des modes 3D, qui prendrait en compte dans sa globalité le caractère tridimensionnel des instabilités dans le traitement du problème, sans avoir recours à la transformation de Squire comme cela est souvent le cas, est nécessaire si l’on souhaite obtenir de meilleurs résultats en terme de précision. La recherche d’une telle précision pour les instabilités tridimensionnelles est justifiée par leur importance capitale dans la compréhension des observations expérimentales du phénomène de transition vers la turbulence pour l’écoulement plan de Poiseuille [5]. L’objectif de cette étude est donc de déterminer, pour une valeur donnée de l’intensité du champ magnétique appliqué, les seuils critiques des modes marginaux tridimensionnels en fonction de leur angle d’inclinaison par rapport à la direction de l’écoulement de base et de quantifier l’erreur commise si de tels seuils étaient obtenus par le biais de la transformation de Squire.

## 2. Modèle mathématique

Notre étude repose sur l’élaboration d’un code de calcul numérique, basé sur la théorie linéaire de la stabilité, qui consiste à suivre l’évolution d’une perturbation infinitésimale  $(\vec{v}, p, \phi)$  des champs respectifs de vitesse, de pression, et de potentiel électrique. L’évolution de ces grandeurs est gouvernée par le système d’équations linéarisées, constitué par les équations de Navier–Stokes d’un fluide Newtonien entraîné par un gradient horizontal de pression, couplées à l’équation de continuité et à l’équation de conservation de la charge. D’après Moreau [4], les nombres de Reynolds magnétiques sont suffisamment petits pour les métaux liquides lors d’expériences MHD en laboratoire, nous permettant ainsi de négliger le champ magnétique induit  $\vec{b}$  devant le champ extérieur  $\vec{B}_0$ . En utilisant les grandeurs de référence  $H, U_{\max}, H/U_{\max}, \rho_0 U_{\max}^2$  et  $B_0 U_{\max} H$  respectivement pour les longueurs, la vitesse, le temps, la pression et le potentiel électrique, ce système d’équations normalisées s’écrit :

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{V}_0 \cdot \vec{\nabla})\vec{v} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{V}_0 = -\vec{\nabla}p + \frac{1}{Re}\nabla^2\vec{v} + \frac{Ha^2}{Re}\vec{j} \times \vec{e}_{B_0} \tag{1}$$

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0 \tag{2}$$

$$\nabla^2\phi = \vec{e}_{B_0} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{v}) \tag{3}$$

$$\vec{j} = -\vec{\nabla}\phi + \vec{v} \times \vec{e}_{B_0} \quad \text{et} \quad \vec{e}_{B_0} = \frac{\vec{B}_0}{B_0} = \vec{e}_z \tag{4}$$

où les nombres sans dimension  $Re = HU_{\max}/\nu$  et  $Ha = B_0H\sqrt{\sigma_e/\rho_0\nu}$ , désignent respectivement les nombres de Reynolds et de Hartmann. La perturbation infinitésimale  $(\vec{v}, p, \phi)$  est superposée à l’écoulement de base  $(\vec{V}_0, P_0, \Phi_0)$ , solution du problème stationnaire, où :

$$\vec{V}_0 = \vec{V}_0(z) = \frac{\cosh(Ha) - \cosh(Haz)}{\cosh(Ha) - 1}\vec{e}_x$$

Cette perturbation  $(\vec{v}, p, \phi)$  est considérée comme une onde plane :  $(\vec{v}, p, \phi) = (\vec{v}(z), p(z), \phi(z)) e^{i(hx+ky)+\omega t}$  où  $h$  et  $k$  sont les nombres d’onde selon la direction transversale et longitudinale et  $\omega$  la pulsation complexe. Le système d’Éqs. (1)–(3) est discrétisé en utilisant la méthode spectrale de TAU faisant appel aux polynômes de Chebyshev comme fonctions de base. Les différentes composantes des perturbations fonctions de  $z$  sont donc décomposées sur un nombre pouvant atteindre les cent polynômes de Chebyshev. Dans ces conditions, le système d’Éqs. (1)–(3) se ramène à un système aux valeurs propres :  $L(Re, Ha, h, k)X = \omega MX$  où  $L(Re, Ha, h, k)$  est un opérateur linéaire dépendant de  $Re, Ha, h$  et  $k$ ,  $M$  est un opérateur linéaire constant et  $X = (\vec{v}(z), p(z), \phi(z))$ . On définit le nombre de Reynolds critique, noté  $Re_c$ , au delà duquel l’écoulement de base devient instable, comme :  $Re_c = \text{Inf}_{(h,k) \in Re^2} Re_0(Ha, h, k)$  où  $Re_0$  est la valeur de  $Re$  correspondant au cas où la valeur propre associée à l’opérateur  $L(Re, Ha, h, k)$  admet une partie réelle nulle.

### 3. Résultats

Notre étude porte essentiellement sur la caractérisation des seuils critiques des modes 3D qui se développent au sein de l'écoulement de Hartmann d'une couche fluide électriquement conductrice, confinée entre deux plans horizontaux électriquement isolants et soumise à l'action d'un champ magnétique transversal et constant. On s'intéressera aussi à la validité de la transformation de Squire pour déduire les seuils critiques tridimensionnels en disposant de ceux bidimensionnels associés à la première instabilité de Tollmien–Schlichting. D'après la Fig. 1, illustrant la variation de  $Re_c$  en fonction de de l'angle  $\alpha = \text{atan}(k_c/h_c)$  que fait le front de l'onde tridimensionnelle avec le plan de l'écoulement de base, et ce, pour différentes valeurs de  $Ha$ , on relève deux résultats principaux à mentionner : le premier consiste à remarquer que le champ magnétique transversal stabilise tout type de mode marginal susceptible d'apparaître au sein de l'écoulement, le second montre clairement que les instabilités 2D sont toujours les premières à se manifester et ce quel que soit l'intensité du champ magnétique considéré ( $Re_{c,2D} < Re_{c,3D}$ ). On vérifie donc, grâce à cette dernière constatation qu'une close de la transformation de Squire reste vérifiée même dans le cas où un champ magnétique est appliqué. Signalons que nos résultats sont en parfaite concordance avec ceux de Takashima [3] qui a étudié uniquement les modes 2D. En effet, l'écart relatif maximal relevé est de 0.35% pour  $Ha = 5$ . Sur la Fig. 2, illustrant l'erreur  $\delta = \Delta Re_c / Re_c$  ( $\Delta Re_c = Re_c - Re_{c,Squire}$ ,  $Re_{c,Squire}$  est l'estimation de  $Re_c$  obtenue par le biais de la transformation de Squire), commise en utilisant la transformation de Squire pour déterminer les seuils critiques des modes 3D en s'appuyant sur ceux des modes 2D, on constate que cette erreur  $\delta$  est certes modeste et ne dépasse jamais les 10% tant que l'angle d'inclinaison  $\alpha$  entre le front de l'onde et la direction de l'écoulement de base n'excède pas les  $60^\circ$  et ce, quelle que soit la valeur de  $Ha$  considérée ( $Ha \lesssim 5$ ). Mais dès lors que la valeur de  $\alpha$  devient supérieure à  $60^\circ$ , l'erreur commise sur l'estimation de  $Re_c$  par la transformation de Squire croît rapidement en fonction de  $\alpha$  et de  $Ha$  pour culminer pour des valeurs de  $\alpha$  proches de  $90^\circ$  vers 33% pour  $Ha = 0$  et 45% pour  $Ha = 5$ . On peut donc clairement affirmer que plus  $\alpha$  et  $Ha$  sont modérés, plus la transformation de Squire donne de meilleurs résultats. Par conséquent, une prudence toute particulière doit être de mise quant à l'utilisation de la transformation de Squire pour des  $Ha$  élevés surtout quand les valeurs de  $\alpha$  deviennent de plus en plus importantes. Quant à la taille des cellules marginales, on constate sur la Fig. 3, illustrant  $K_c = (h_c^2 + k_c^2)^{1/2}$ , qu'elle diminue légèrement avec  $\alpha$  pour un nombre de Hartmann donné, preuve que ces dernières rétrécissent quand leur front s'écarte davantage du plan de l'écoulement de base. Il convient toutefois de signaler que cette diminution est d'autant plus marquée que  $Ha$  est grand. On peut aussi constater que pour

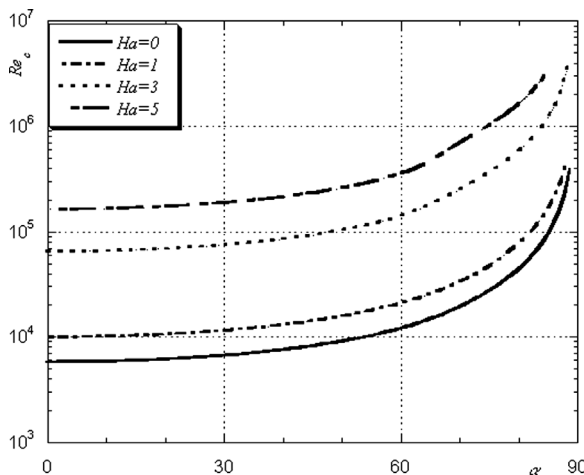


Fig. 1. Variation de  $Re_c$  en fonction de  $\alpha$  pour différentes valeurs de  $Ha$ .

Fig. 1. Variation of  $Re_c$  versus  $\alpha$  for different values of  $Ha$ .

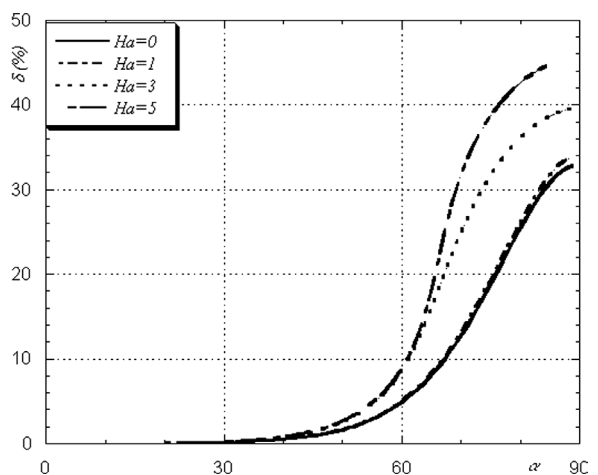


Fig. 2. Variation de l'erreur  $\delta$  en fonction de  $\alpha$  pour différentes valeurs de  $Ha$ .

Fig. 2. Variation of the error  $\delta$  versus  $\alpha$  for different values of  $Ha$ .

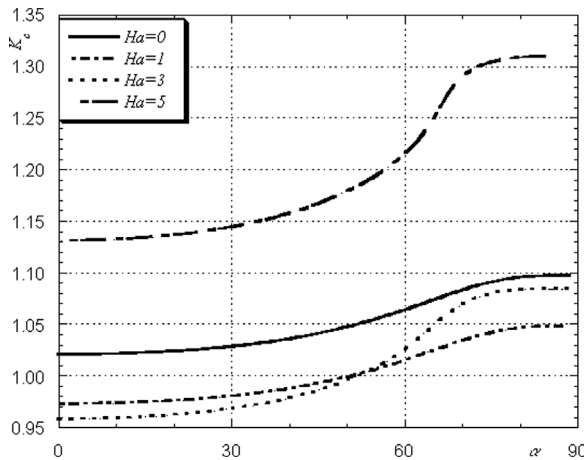


Fig. 3. Variation du nombre d'onde  $K_c$  en fonction de  $\alpha$  pour différentes valeurs de  $Ha$ .

Fig. 3. Variation of the wave number  $K_c$  versus  $\alpha$  for different values of  $Ha$ .

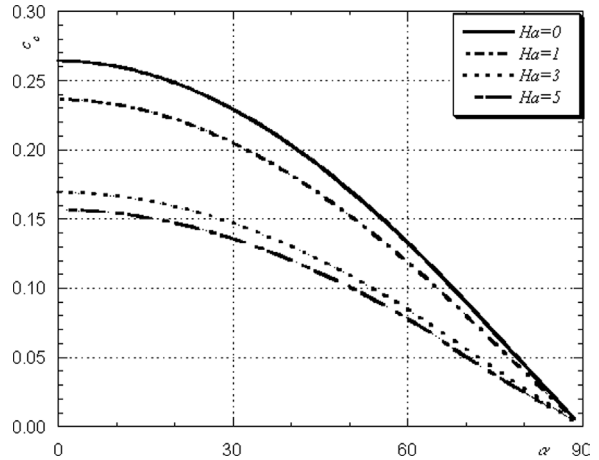


Fig. 4. Variation de la vitesse d'onde  $c_c$  en fonction de  $\alpha$  pour différentes valeurs de  $Ha$ .

Fig. 4. Variation of the wave speed  $c_c$  versus  $\alpha$  for different values of  $Ha$ .

$\alpha \gtrsim 80^\circ$ , la taille des cellules marginales ne varie quasiment plus avec  $\alpha$  pour atteindre une valeur constante qui ne dépend plus que de  $Ha$ . La célérité des modes instables, illustrée sur la Fig. 4, montre clairement une tendance à la baisse de  $c_c$  quand  $\alpha$  augmente, et ce pour tous les nombres de  $Ha$  considérés. Par ailleurs, pour les modes 3D, et à l'instar des instabilités de Tollmien–Schlichting, on note une diminution de la célérité d'onde  $c_c$  quand  $Ha$  augmente. Cependant, on remarque que plus  $Ha$  est grand, plus la baisse constatée quand  $\alpha$  augmente est modérée, de telle sorte que les célérités d'ondes  $c_c$  qui étaient relativement différentes pour  $\alpha = 0^\circ$  deviennent assez proches pour  $\alpha$  voisin de  $90^\circ$ .

#### 4. Conclusion

Cette étude consacrée à l'effet d'un champ magnétique transversal sur les instabilités tridimensionnelles susceptibles d'apparaître au sein de l'écoulement de Hartmann a principalement prouvé que la transformation de Squire habituellement utilisée pour réduire les problèmes de stabilité linéaire tridimensionnels en problèmes bidimensionnels équivalents ne donne des résultats satisfaisants que dans le cas où le front de l'onde 3D considérée ne s'écarte pas significativement du plan de l'écoulement de base. L'écart, constaté entre les résultats obtenus par la transformation de Squire et ceux obtenus en considérant l'onde comme tridimensionnelle dans le traitement global du problème d'instabilité, est amplifié dans le cas où un champ magnétique est appliqué. Il convient donc d'utiliser une telle transformation avec la plus grande prudence dès lors que le nombre de Hartmann devient significatif.

#### Références

- [1] R.C. Lock, The stability of the flow of an electrically conducting fluid between parallel planes under a transverse magnetic field, Proc. Roy. Soc. London Ser. A 233 (1955) 105.
- [2] M.C. Potter, J.A. Kutchey, Stability of plane Hartmann flow subject to a transverse magnetic field, Phys. Fluids 16 (1973) 1848–1851.
- [3] M. Takashima, The stability of the modified plane Poiseuille flow in the presence of a transverse magnetic field, Fluid Dyn. Res. 14 (1996) 293–310.
- [4] R. Moreau, Magnetohydrodynamics, Kluwer Academic, 1990.
- [5] P.A. Elofsson, P.H. Alfredsson, An Experimental study of oblique transition in plane Poiseuille flow, J. Fluid Mech. 358 (1998) 177–202.