



ELSEVIER

Contents lists available at ScienceDirect

Comptes Rendus Mécanique

www.sciencedirect.com



Effet d'un champ magnétique uniforme sur les instabilités de Rayleigh–Bénard avec effet Soret

*Influence of a magnetic field on the stability of a binary fluid with Soret effect*Mokhtar Ben Sassi^a, Slim Kaddeche^{a,*}, Ali Abdennadher^b, Daniel Henry^c, Hamda Ben Hadid^c, Abdelkader Mojtabi^d^a Université de Carthage, Institut national des sciences appliquées et de technologie, Laboratoire de recherche matériaux, mesures et applications, LR 11 ES 25, INSAT, B.P. 676, 1080 Tunis cedex, Tunisie^b Université de Carthage, Institut national des sciences appliquées et de technologie, Laboratoire d'ingénierie mathématique, EPT, La Marsa, Tunisie^c Laboratoire de mécanique des fluides et d'acoustique, CNRS/Université de Lyon, Université Claude-Bernard Lyon-1/École centrale de Lyon/INSA de Lyon, ECL, 36, avenue Guy-de-Collongue, 69134 Écully cedex, France^d IMFT, UMR CNRS/INP/UPS 5502, UFR MIG, Université Paul-Sabatier, 118, route de Narbonne, 31062 Toulouse cedex, France

I N F O A R T I C L E

Historique de l'article :

Reçu le 20 mai 2015

Accepté le 24 septembre 2015

Disponible sur Internet le 12 novembre 2015

Mots-clés :

Magnétohydrodynamique

Stabilité

Soret

Keywords :

Magnetohydrodynamics

Stability

Soret

R É S U M É

L'effet de l'intensité et de l'orientation d'un champ magnétique uniforme sur la transition critique au sein d'une couche fluide binaire, électriquement conductrice, stratifiée en température et en concentration, en prenant en considération l'effet Soret, est étudié numériquement. Pour une telle configuration, les résultats ont mis en évidence que les seuils critiques correspondant à un champ magnétique de direction quelconque peuvent se déduire de ceux obtenus pour un champ magnétique vertical et que les axes des rouleaux marginaux des modes instables sont désormais alignés avec la composante horizontale du champ magnétique. Par ailleurs, une étude analytique est menée pour étudier l'impact du champ magnétique sur les instabilités monocellulaires. L'effet du champ magnétique sur de telles instabilités a mis en évidence un phénomène inédit consistant à modifier profondément la nature des modes instables, qui perdent leur caractère monocellulaire pour retrouver leur aspect à plusieurs rouleaux qui les caractérisaient sans champ magnétique pour $\psi < \psi_{\ell_0} = 131Le/(34 - 131Le)$. Pour un fluide binaire caractérisé par un nombre de Lewis Le et un facteur de séparation $\psi > \psi_{\ell_0}$, la valeur du nombre de Hartmann $Ha_\ell(\psi, Le)$ correspondant à cette transition responsable d'une modification significative des transferts de masse et de chaleur peut être déterminée à partir des relations analytiques établies dans le cadre de ce travail.

© 2015 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

A B S T R A C T

The effect of both magnitude and orientation of a uniform magnetic field on the critical transition occurring within an electrically conducting binary fluid layer, stratified

* Auteur correspondant.

Adresses e-mail : slimkaddeche@yahoo.fr, slim.kaddeche@insat.rnu.tn (S. Kaddeche), ali_abdennadher@yahoo.fr, ali.abdennadher@insat.rnu.tn (A. Abdennadher).

in temperature and concentration, taking into account the Soret effect, is investigated numerically. For such a configuration, the results show that the critical thresholds corresponding to an arbitrary orientated magnetic field can be derived from those obtained for a vertical magnetic field and that the axes of the marginal cells are aligned with the horizontal component of the magnetic field. Moreover, an analytical study is conducted to investigate the impact of the magnetic field on long-wavelength instabilities. The effect of the magnetic field on such instabilities reveals a new phenomenon consisting in major changes of the unstable modes that lose their unicellular nature to regain their multi-roll characteristic, as it is the case without magnetic field for $\psi < \psi_{\ell_0} = 131Le/(34 - 131Le)$. For a binary fluid characterized by a Lewis number Le and a separation factor $\psi > \psi_{\ell_0}$, the value of the Hartmann number $Ha_{\ell}(\psi, Le)$ corresponding to that transition responsible for a significant change in mass and heat transfer can be determined from the analytical relations derived in this work.

© 2015 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

Abridged English version

The heat and mass transfer occurring in the Rayleigh–Bénard configuration is involved in many industrial processes. The non-intrusive control of such heat and mass transfer by an external magnetic field [1,2], an acoustic wave [3] or high-frequency vibrations [4] is a crucial problem that allows the optimization of devices incorporating a fluid layer confined between two solid walls maintained at different temperatures. For electrically conducting fluids, applying an external magnetic field is commonly used to delay critical transition, and consequently the appearance of natural convection, to achieve a purely conductive transfer mode [5,6]. For binary fluids, it is no longer realistic to neglect the existing coupling between heat and mass transfer, and the stability of the Rayleigh–Bénard configuration with Soret effect was particularly investigated to determine the effect of this coupling on the critical threshold for the onset of thermosolutal convection [7]. But despite the importance of such an issue from both a fundamental and an applied point of view, to our knowledge, studies on the control of the critical transition by a magnetic field in the presence of Soret effect are relatively rare. The aim of our investigation is to extend the study to the impact of a magnetic field of variable orientation and magnitude on the Rayleigh–Bénard critical transition by taking into account the Soret effect. The present study is mainly based on a numerical approach. Nevertheless, an analytical approach is also performed to characterize the transition for the long-wavelength instabilities and to study its evolution under the influence of a magnetic field. The main results can be summarized as follows:

- for the case $\psi < \psi_{\ell_0}$, the unstable modes are multiple finite wavelength cells and they keep such a structure when a magnetic field is applied. The most efficient stabilizing effect is obtained when the magnetic field is perfectly vertical, corresponding to the case $\beta = 0^\circ$. Any change in the polar angle is responsible for an attenuation of the stabilizing effect, which corresponds to replacing the strength of the magnetic field Ha by an effective strength $Ha \cos \beta$. Through this transformation, all the results related to an arbitrary orientated magnetic field with an azimuthal angle α and a polar angle β are derived from those obtained for a perfectly vertical magnetic field ($\beta = 0^\circ$) with unstable marginal cells characterized by their axes, which are parallel to the horizontal component of the magnetic field. Moreover, for the case of a horizontal magnetic field ($\beta = 90^\circ$), the critical thresholds remain the same as for $Ha = 0$ corresponding to the situation without magnetic field ($Ra_c = Ra_c(Ha = 0) = 1707.76$ and $\|\vec{k}_c\| = h_c(Ha = 0) = 3.11$). The change of the azimuthal angle α affects only the orientation of the marginal cells whose axis will be aligned with the direction of the magnetic field;
- for the case $\psi \geq \psi_{\ell_0}$, the stabilization process changes significantly. Indeed, for $Ha = 0$, the instability corresponds to a single-cell mode (infinite wavelength instability), which is not favorable to heat and mass transfer. As observed for $\psi < \psi_{\ell_0}$, the magnetic field maintains its stabilizing effect. However, the evolution of the unstable modes is significantly different. Indeed, the initially single-cell modes for $Ha = 0$ remain so until a Hartmann number $Ha_{\ell}(\psi, Le)$ for which a major change affecting the critical wave number h_c occurs. Indeed, for $Ha = Ha_{\ell}(\psi, Le)$, the critical wave number h_c sharply increases from zero towards finite values, with, as a direct consequence, the disappearance of the single-cell instability and the emergence of the more usual multiple finite wavelength cells. This change has practical consequences of primary importance since this multiple-finite-wavelength-cell mode contributes to enhance heat and mass transfer. Moreover, the value of the Hartmann number $Ha_{\ell}(\psi, Le)$ that ensures this optimization of transfers could be derived analytically from the relationships (18)–(20), as mentioned in part 4 of the present work.

1. Introduction

Les transferts de masse et de chaleur spécifiques à la configuration de Rayleigh–Bénard se retrouvent dans plusieurs processus industriels. Le contrôle non intrusif de tels transferts thermiques et massiques par application d'un champ magnétique [1,2], d'une onde acoustique [3] ou de vibrations à hautes fréquences [4] est un défi crucial qui permet d'optimiser les rendements des dispositifs intégrant une couche fluide confinée entre deux parois solides portées à des températures

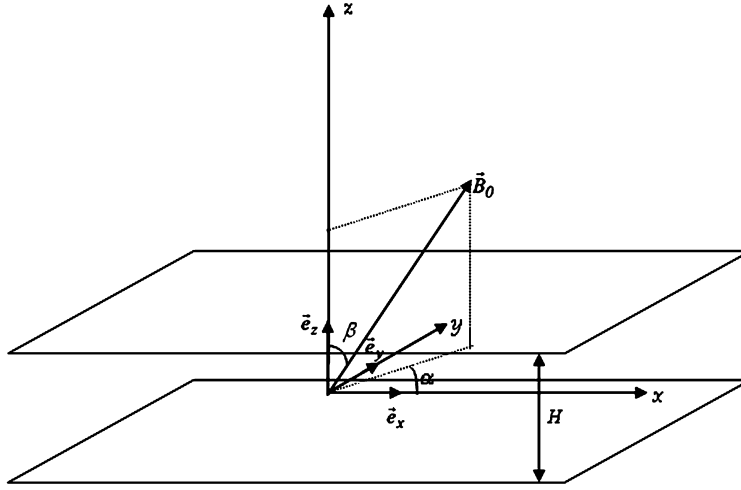


Fig. 1. Configuration étudiée.

Fig. 1. Studied configuration.

différentes. Pour les fluides électriquement conducteurs, l'application d'un champ magnétique est couramment utilisée pour contrôler la convection naturelle se développant au-delà du seuil critique et retarder ainsi son apparition pour assurer un mode de transfert purement conductif [5,6]. Pour les fluides binaires où il n'est plus réaliste de négliger le couplage existant entre le transfert de chaleur et de masse, la stabilité de la configuration de Rayleigh–Bénard avec effet Soret a été particulièrement étudiée pour cerner l'impact de ce couplage sur le seuil critique d'apparition de la convection thermosolutale [7]. Mais, en dépit de l'importance de cette problématique, aussi bien d'un point de vue fondamental qu'appliqué, les études portant sur le contrôle par champ magnétique de la transition critique en présence de l'effet Soret sont relativement rares. L'objectif de nos investigations est d'étendre l'étude de l'impact d'un champ magnétique d'orientation variable sur la transition critique en configuration de Rayleigh–Bénard avec effet Soret par une approche numérique, mais aussi de caractériser cette transition pour des instabilités monocellulaires à longueur d'onde infinie par une approche analytique et d'étudier son évolution sous l'effet d'un champ magnétique.

2. Formulation du problème

Soit une couche d'un fluide binaire, newtonien et électriquement conducteur, de conductivité électrique σ_e , de viscosité cinématique ν et obéissant à la loi de Boussinesq : $\rho = \rho_0 [1 - \beta_T(T - T_0) - \beta_C(C - C_0)]$ où β_T et β_C désignent respectivement les coefficients d'expansion thermique et solutale. Les flux de masse et de chaleur, incluant l'effet Soret, s'écrivent : $\vec{J}_C = -\rho D_C \vec{\nabla} C - \rho D_S \vec{\nabla} T$ et $\vec{J}_T = -\lambda \vec{\nabla} T$, où D_C , D_S et λ sont, respectivement, le coefficient de diffusion de masse, le coefficient de diffusion de Soret et la conductivité thermique. Cette couche, confinée entre deux plans horizontaux distants de H et différemment chauffés, est le siège d'une stratification linéaire de température et de concentration, et est soumise à un champ magnétique uniforme pouvant être orienté dans toutes les directions de l'espace : $\vec{B}_0 = B_0 (\sin \beta \cos \alpha \vec{e}_x + \sin \beta \sin \alpha \vec{e}_y + \cos \beta \vec{e}_z)$ (Fig. 1). En prenant comme grandeurs de référence H pour les longueurs, κ/H pour la vitesse, H^2/κ pour le temps et $\rho_0 \kappa^2/H^2$ pour la pression (κ désigne la diffusivité thermique), $\Delta T = T_1 - T_2$ pour la température et $\Delta C = C_1 - C_2 = -(D_S/D_C) \Delta T$ pour la concentration, les équations d'évolution linéarisées d'une perturbation infinitésimale $(\vec{v}, p, \theta, \eta (= \theta - c), \phi) = (\vec{v}(z), p(z), \theta(z), \eta(z), \phi(z)) e^{i(hx+ky)+\omega t}$ peuvent s'écrire :

$$Pr \left[D^2 - (h^2 + k^2) \right] u - ih p + Pr Ha^2 F_{m,x} = \omega u \quad (1)$$

$$Pr \left[D^2 - (h^2 + k^2) \right] v - ik p + Pr Ha^2 F_{m,y} = \omega v \quad (2)$$

$$Pr \left[D^2 - (h^2 + k^2) \right] w - Dp + Pr Ha^2 F_{m,z} + Ra Pr [(1 + \psi)\theta - \psi\eta] = \omega w \quad (3)$$

$$ihu + ikv + Dw = 0 \quad (4)$$

$$\left[D^2 - (h^2 + k^2) \right] \theta - w = \omega \theta \quad (5)$$

$$Le \left[D^2 - (h^2 + k^2) \right] \eta + \left[D^2 - (h^2 + k^2) \right] \theta = \omega \eta \quad (6)$$

$$\left[D^2 - (h^2 + k^2) \right] \phi = (-ik \cos \beta + \sin \beta \sin \alpha D) u + (ih \cos \beta - \sin \beta \cos \alpha D) v + i \sin \beta (\cos \alpha k - \sin \alpha h) w \quad (7)$$

où $D = \frac{\partial}{\partial z}$, $D^2 = \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ et où $F_{m,x}$, $F_{m,y}$ et $F_{m,z}$ sont les composantes de la force magnétique selon les trois axes (Ox), (Oy) et (Oz), qui s'écrivent comme suit :

$$F_{m,x} = - \left(\cos^2 \beta + \sin^2 \beta \sin^2 \alpha \right) u + \sin^2 \beta \cos \alpha \sin \alpha v + \cos \beta \sin \beta \cos \alpha w + \sin \beta \sin \alpha D\phi - ik \cos \beta \phi \quad (8)$$

$$F_{m,y} = \sin^2 \beta \cos \alpha \sin \alpha u - \left(\cos^2 \beta + \sin^2 \beta \cos^2 \alpha \right) v + \sin \beta \cos \beta \sin \alpha w - \sin \beta \cos \alpha D\phi + ih \cos \beta \phi \quad (9)$$

$$F_{m,z} = \sin \beta \cos \beta \cos \alpha u + \sin \beta \cos \beta \sin \alpha v - \sin^2 \beta w - i \sin \beta (\sin \alpha h - \cos \alpha k) \phi \quad (10)$$

Les nombres sans dimension figurant dans les équations (1)–(10) sont le nombre de Rayleigh : $Ra = g\beta_T \Delta T H^3 / \nu \kappa$, le nombre de Prandtl : $Pr = \nu / \kappa$, le nombre de Hartmann : $Ha = B_0 H \sqrt{\sigma_e / \rho_0 \nu}$, le facteur de séparation : $\psi = -\beta_C D_S / \beta_T D_C$ et le nombre de Lewis : $Le = D_C / \kappa$. Par ailleurs, nous précisons que le coefficient de thermodiffusion dépend non seulement de la température moyenne de la solution binaire, mais également de la fraction massique des deux constituants du mélange binaire étudié. À titre d'exemple, une solution aqueuse de NaCl (0.5 mol/L) présente un comportement inhabituel puisque, pour une température inférieure à 12 °C, le coefficient de Soret D_S / D_C est négatif, alors qu'il devient positif pour une température supérieure à 12 °C [8]. Dans notre étude, en formulation adimensionnelle, le coefficient de thermodiffusion est remplacé par le facteur de séparation ψ . Nous avons conduit une étude de stabilité linéaire en considérant des valeurs positives et négatives du facteur de séparation ψ .

Les équations linéarisées (1)–(10) développées ci-dessus peuvent donc s'écrire comme un problème aux valeurs propres généralisé du type : $\mathcal{E} X = \omega \Pi X$, où X désigne le vecteur $(\bar{v}(z), p(z), \theta(z), \eta(z), \phi(z))$, \mathcal{E} est un opérateur linéaire dépendant de $h, k, Ra, Pr, Le, Ha, \alpha$ et β et Π est un opérateur linéaire creux contenant des zéros et des uns. Ce système aux valeurs propres généralisé est résolu par une méthode numérique basée sur la collocation spectrale de Tau-Chebyshev et utilisant des développements en polynômes de Chebyshev (N inconnues pour l'ensemble des variables du problème u, v, w, p, θ, η et ϕ). La méthode de Tau-Chebyshev permet d'éviter l'apparition de valeurs propres parasites en mettant des conditions aux limites à la fin de chaque sous-matrice constituant la matrice principale \mathcal{E} . Le nombre de Rayleigh critique Ra_c est déterminé à partir des minimums de la fonction à deux variables h et k correspondant au seuil marginal $Ra_0(Ha, Pr, Le, \alpha, \beta)(h, k)$ obtenu pour un jeu de paramètres Ha, Pr, Le, α et β fixé. Ce seuil marginal $Ra_0(Ha, Pr, Le, \alpha, \beta)(h, k)$ correspond à une valeur propre ω_n admettant une partie réelle nulle, alors que toutes les autres valeurs propres $(\omega_m)_{1 \leq m \neq n \leq N}$ sont à parties réelles négatives. Le nombre de Rayleigh critique Ra_c peut donc s'écrire :

$$Ra_c = \text{Min}_{(h,k) \in \mathbb{R}^2} Ra_0(Ha, Pr, Le, \alpha, \beta)(h, k) \quad (11)$$

3. Instabilités de Rayleigh–Bénard avec effet Soret et champ magnétique de direction quelconque

Sans champ magnétique, les instabilités de Rayleigh–Bénard en cavité infinie se déclenchent au-dessus d'un seuil critique $Ra_{c_0} = Ra_c(Ha = 0) = 1707.76$ et correspondent à des structures thermo-convectives stationnaires de nombre d'onde $h_{c_0} = h_c(Ha = 0) = 3.11$. Pour un fluide binaire avec un facteur de séparation ψ positif, les seuils critiques ainsi que les nombres d'onde correspondants (ne dépendant que de Le et pas de Pr) décroissent fortement lorsque ψ augmente. Ce nombre d'onde devient nul pour une valeur de ψ supérieure à $\psi_{\ell_0} = 131Le / (34 - 131Le)$ et par conséquent des cellules convectives de taille infinie apparaissent. Pour ψ négatif, le seuil stationnaire augmente, mais il est vite précédé par un seuil oscillatoire (dépendant de Le et de Pr) qui évolue peu avec ψ . Nous allons étudier successivement l'influence du champ magnétique dans les cas où $\psi < \psi_{\ell_0}$ puis $\psi > \psi_{\ell_0}$.

3.1. Influence du champ magnétique pour $\psi < \psi_{\ell_0}$

La Fig. 2 illustrant la variation de Ra_c en fonction de Ha pour un champ magnétique vertical et $Le = 0.01$ montre clairement que le champ vertical retarde l'apparition de la convection thermosolutale, et ce, pour les différentes valeurs de ψ considérées. Les nombres d'onde associés augmentent aussi avec Ha , indiquant que la taille des cellules marginales devient de plus en plus réduite quand le champ magnétique devient plus intense (Fig. 3). Nous notons ces courbes critiques obtenues sous champ magnétique vertical respectivement $Ra_v(Ha)$ et $h_v(Ha)$. À fort Ha , des lois asymptotiques sont obtenues, et elles s'avèrent similaires à celles obtenues sans effet Soret. Par ailleurs, elles se montrent en très bonne concordance avec celles établies par Julien et al. [9], à savoir : $Ra_c \sim 10 Ha^2$ et $h_c \sim 1.9 Ha^{\frac{1}{3}}$, ou encore $Ra_c \sim 10 Q$ et $h_c \sim 1.9 Q^{\frac{1}{6}}$ (où $Q = Ha^2$ est le nombre de Chandrasekhar). Pour $\psi \geq 0$, le champ magnétique préserve le caractère bi-dimensionnel stationnaire des modes instables. Par ailleurs, pour les valeurs négatives de ψ considérées, le caractère bi-dimensionnel oscillatoire des modes instables est aussi conservé, avec une célérité critique qui augmente avec Ha , comme illustré sur la Fig. 4. Nous proposons à présent de déterminer l'effet de la variation de la direction d'un champ magnétique ayant une composante horizontale non nulle ($\beta \neq 0^\circ$) sur l'apparition de la convection. Les investigations numériques mettent en évidence deux résultats importants : tout d'abord, le nombre de Rayleigh critique Ra_c reste exactement le même que celui obtenu pour un champ magnétique parfaitement vertical si on remplace la valeur de Ha par $Ha \cos \beta$ ($Ra_c = Ra_v(Ha \cos \beta)$); ensuite,

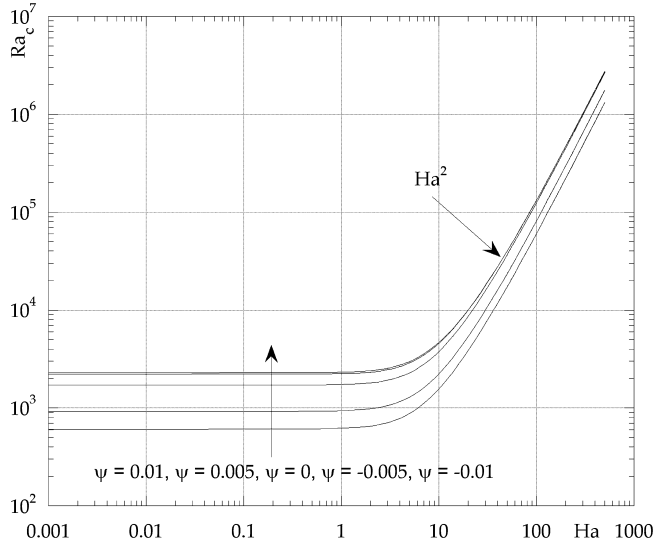


Fig. 2. Variation of Ra_c avec Ha pour $Pr = 0.01$, $Le = 0.01$ et différentes valeurs de ψ .
Fig. 2. Variation of Ra_c with Ha for $Pr = 0.01$, $Le = 0.01$ and different values of ψ .

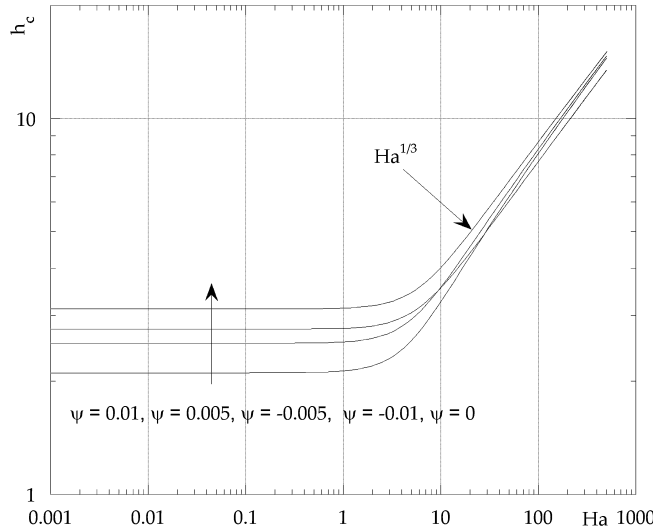


Fig. 3. Variation of h_c avec Ha pour $Pr = 0.01$, $Le = 0.01$ et différentes valeurs de ψ .
Fig. 3. Variation of h_c with Ha for $Pr = 0.01$, $Le = 0.01$ and different values of ψ .

le vecteur d'onde devient : $\vec{k}_c = (h_v(Ha \cos \beta) \sin \alpha, -h_v(Ha \cos \beta) \cos \alpha, 0)$, indiquant que le champ magnétique, en plus de stabiliser, aligne les cellules marginales sur sa propre direction ; enfin, $\|\vec{k}_c\| = h_v(Ha \cos \beta)$, indiquant que la longueur d'onde des cellules marginales $\lambda_c = 2\pi / \|\vec{k}_c\| = 2\pi / h_v(Ha \cos \beta)$ reste constante quelle que soit la valeur de l'angle azimutal α que fait le champ magnétique avec la direction de l'axe Ox . Pour parachever l'étude de l'impact de la direction d'un champ magnétique sur la transition critique, on considère à présent le cas d'un champ magnétique coplanaire par rapport à la couche de fluide ($\beta = 90^\circ$). Les résultats des simulations numériques montrent que le champ magnétique n'a plus aucun effet stabilisant : $Ra_c(Ha, \alpha) = Ra_{c0} = Ra_c(Ha = 0) = 1707.76$, mais uniquement un effet d'orientation où, à l'instar du cas $\beta \neq 0^\circ$, les cellules marginales s'alignent avec la direction du champ magnétique avec un vecteur d'onde : $\vec{k}_c = (h_c(Ha = 0) \sin \alpha, -h_c(Ha = 0) \cos \alpha, 0)$ de norme constante $\|\vec{k}_c\| = h_{c0} = h_c(Ha = 0) = 3.11$, qui indique que la longueur d'onde des cellules marginales demeure constante. Par ailleurs, le fait que le champ magnétique coplanaire ne retarde plus le seuil d'apparition de la convection est une conséquence directe de l'alignement des cellules marginales avec le champ magnétique. En effet, si l'on considère le rotationnel du terme magnétique $\vec{j} \times \vec{e}_{B_0}$, on obtient :

$$\begin{aligned} \text{rot}(\vec{j} \times \vec{e}_{B_0}) &= \vec{j}(\vec{\nabla} \cdot \vec{e}_{B_0}) - (\vec{j} \cdot \vec{\nabla})\vec{e}_{B_0} - \vec{e}_{B_0}(\vec{\nabla} \cdot \vec{j}) + (\vec{e}_{B_0} \cdot \vec{\nabla})\vec{j} \\ &= i(\vec{e}_{B_0} \cdot \vec{k})\vec{j} = \vec{0} \end{aligned} \tag{12}$$

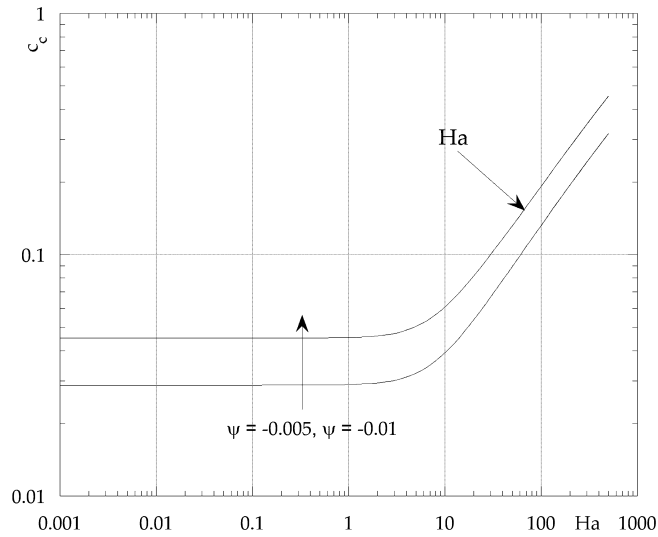


Fig. 4. Variation de c_c avec Ha pour $Pr = 0.01$, $Le = 0.01$ et deux valeurs négatives de ψ .

Fig. 4. Variation of c_c with Ha for $Pr = 0.01$, $Le = 0.01$ and two negative values of ψ .

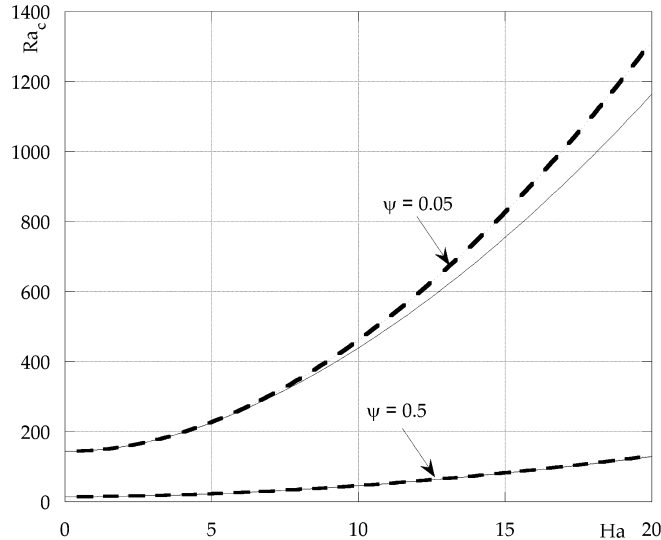


Fig. 5. Variation de Ra_c en fonction de Ha pour $\psi = 0.05$, $\psi = 0.5$ et $Le = 0.01$ (traits continus : numérique, traits discontinus : analytique).

Fig. 5. Variation of Ra_c as a function of Ha for $\psi = 0.05$ and $Le = 0.01$ (solid lines: numerical results, heavy dashed lines: analytical results).

ce qui implique qu'il existe un potentiel U tel que $\vec{j} \times \vec{e}_{B_0} = -\vec{\nabla}U$ qui, une fois intégré à la pression, fait disparaître le terme magnétique du système d'équations aux perturbations (1)–(10).

3.2. Influence du champ magnétique pour $\psi \geq \psi_{\ell_0}$

Nous choisissons maintenant des fluides dont le nombre de Lewis est toujours $Le = 0.01$, mais dont le facteur de séparation ψ est supérieur à $\psi_{\ell_0}(Le = 0.01) = 0.0400734$ ($\psi = 0.05$ et $\psi = 0.5$), correspondant donc à des modes instables monocellulaires. La Fig. 5 nous montre que le champ magnétique conserve son effet stabilisant correspondant à une hausse du nombre de Rayleigh critique Ra_c avec Ha . Mais, en observant la Fig. 6, nous constatons que cet effet stabilisant s'accompagne d'un changement majeur par rapport aux cas $\psi < \psi_{\ell_0}$. En effet, il existe une valeur limite de Ha dépendant de ψ et notée $Ha_\ell(\psi)$ (avec, par exemple, $Ha_\ell(0.05) \approx 2.6$ et $Ha_\ell(0.5) \approx 10$) telle que, pour $Ha < Ha_\ell(\psi)$, le mode instable reste monocellulaire ($h_c \sim 0$) et, dès que $Ha \geq Ha_\ell(\psi)$, le nombre d'onde critique h_c se met à croître très significativement de zéro vers des valeurs finies. Notons qu'une procédure de calcul plus précise de $Ha_\ell(\psi)$ et donnant $Ha_\ell(0.05) = 2.64937$ et $Ha_\ell(0.5) = 10.01908$ pour une précision de 10^{-4} est détaillée au niveau de la partie 4. Nous constatons d'après la Fig. 5 que l'écart entre les valeurs numériques et analytiques du nombre de Rayleigh critique Ra_c augmente avec Ha . Pour $Ha \leq 20$,

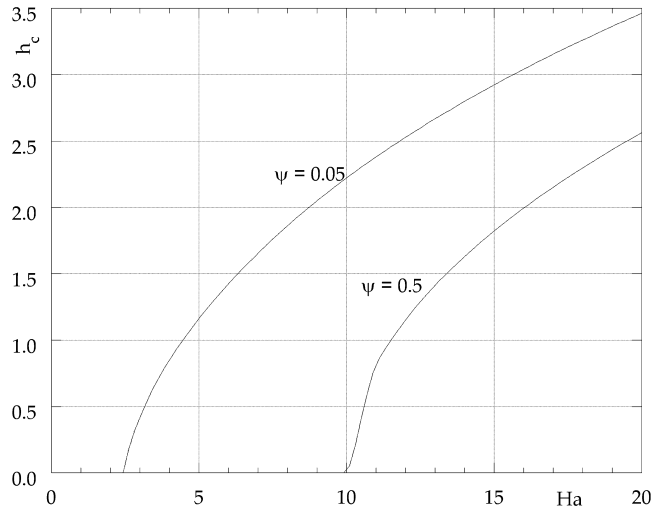


Fig. 6. Variation of h_c en fonction de Ha pour $\psi = 0.05$, $\psi = 0.5$ et $Le = 0.01$.
Fig. 6. Variation of h_c as a function of Ha for $\psi = 0.05$, $\psi = 0.5$ and $Le = 0.01$.

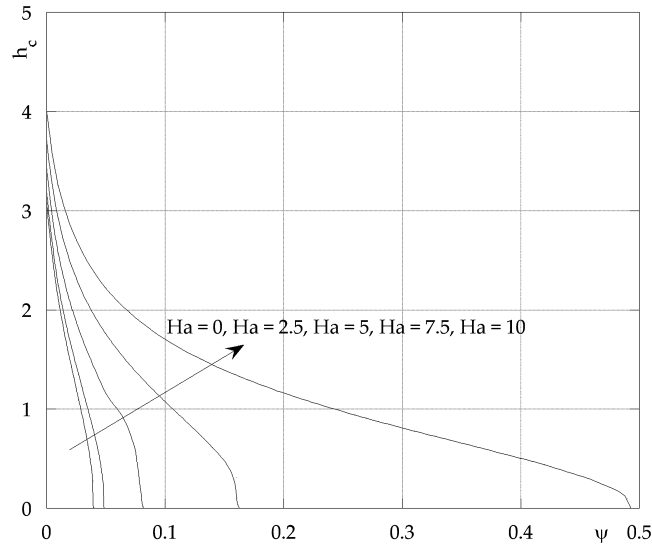


Fig. 7. Variation of h_c avec ψ pour $Le = 0.01$ et différentes valeurs de Ha .
Fig. 7. Variation of h_c with ψ for $Le = 0.01$ and different values of Ha .

cet écart commence à être significatif à partir d'un nombre de Hartmann plus petit pour le cas $\psi = 0.05$ que pour celui où $\psi = 0.5$. Ce résultat est dû au fait que l'expression analytique de Ra_c n'est valable que pour des instabilités monocellulaires et par conséquent pour $Ha < Ha_\ell(\psi)$, ce qui correspond à $Ha < 2.64937$ pour $\psi = 0.05$ et $Ha < 10.01908$ pour $\psi = 0.5$. Par ailleurs, le choix qui a été fait de limiter l'intervalle de variation à $Ha \leq 20$ montre qu'il est possible d'être en dehors de la limite de validité du domaine de prévalence des modes monocellulaires et conserver pour autant une bonne concordance entre les résultats numériques et analytiques, notamment pour le cas $\psi = 0.5$. Par conséquent, les résultats relatifs au nombre de Rayleigh critique ne sont pas en mesure à eux seuls de nous renseigner sur la valeur précise du nombre de Hartmann au-delà duquel la transition entre instabilités monocellulaires et multicellulaires s'opère. Si on souhaite obtenir ces valeurs $Ha_\ell(\psi)$ avec une bonne précision en procédant par une approche purement numérique, la connaissance de la variation du nombre d'onde critique h_c en fonction de Ha à l'instar de ce qui est illustré sur la Fig. 6 s'impose. De ces résultats inédits découlent des conséquences majeures sur le transfert de masse et de chaleur au sein de la couche fluide. En effet, quand une instabilité initialement monocellulaire change de structure pour devenir un mode critique à plusieurs rouleaux, il s'ensuit une intensification des transferts thermiques et massiques qui peut être recherchée pour l'optimisation d'un processus impliquant un dispositif du type configuration de Rayleigh–Bénard.

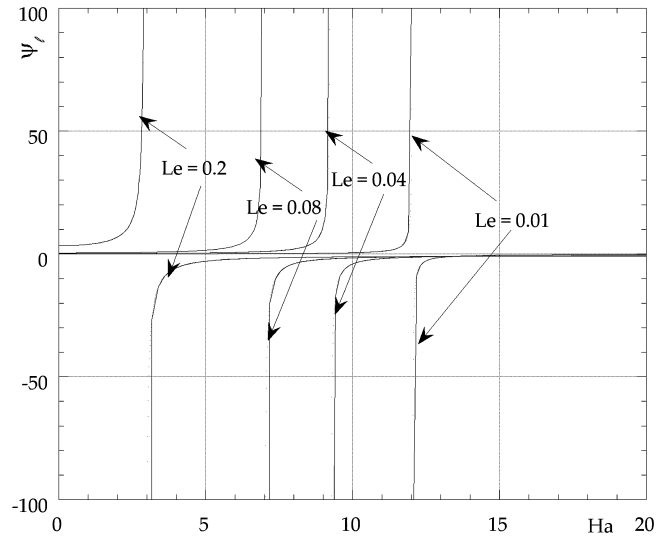


Fig. 8. Variation de ψ_ℓ en fonction de Ha pour différentes valeurs de Le .

Fig. 8. Variation of ψ_ℓ as a function of Ha for different values of Le .

3.3. Influence du champ magnétique sur la transition entre modes multicellulaires et monocellulaires

La transition entre les modes multicellulaires et monocellulaires correspond aux valeurs de ψ pour lesquelles le nombre d'onde h tend vers zéro. Nous donnons sur la Fig. 7 la variation de ce nombre d'onde critique h_c en fonction de ψ pour un fluide avec $Le = 0.01$ et différentes valeurs du nombre de Hartmann Ha . Nous observons que la décroissance vers zéro de h_c a lieu d'autant plus loin que la valeur de Ha est grande. Afin de mieux appréhender la transition entre les modes monocellulaires et multicellulaires, nous représentons sur la Fig. 8 la variation de ψ_ℓ (obtenu analytiquement, voir partie 4) en fonction de Ha pour différentes valeurs du nombre de Lewis. Cette figure illustre clairement qu'après une augmentation assez modérée avec le nombre de Hartmann, ψ_ℓ se met à croître très significativement avec Ha et à atteindre des valeurs quasiment infinies quand Ha tend vers Ha_n (les valeurs de Ha_n sont consignées dans le Tableau 2) pour basculer dans la zone $\psi_\ell < 0$ quand $Ha > Ha_n$. Ce résultat indique clairement que le champ magnétique contrôle la transition entre modes monocellulaires et modes multicellulaires en repoussant de plus en plus loin la valeur du facteur de séparation critique ψ_ℓ au-delà duquel les modes monocellulaires sont susceptibles d'apparaître. D'un point de vue pratique, en considérant un fluide binaire caractérisé par un nombre de Lewis Le et un facteur de séparation ψ tel que $\psi > \psi_{\ell_0}$, avec $\psi_{\ell_0} = 131Le/(34 - 131Le)$, il est alors manifeste que les premières instabilités qui apparaissent seront monocellulaires. En appliquant un champ magnétique correspondant à une valeur de $Ha > Ha_\ell(\psi, Le)$ qui ferait croître la valeur du facteur de séparation critique de ψ_{ℓ_0} à ψ_ℓ afin que la relation $\psi < \psi_\ell$ soit vérifiée (ce qui est toujours possible d'après les résultats illustrés sur la Fig. 8), les premiers modes instables seront désormais multicellulaires et non plus monocellulaires, permettant ainsi une intensification des transferts thermiques et massiques.

4. Influence du champ magnétique sur les modes instables monocellulaires

D'après l'étude de stabilité réalisée plus haut, nous constatons qu'un champ magnétique, dont l'orientation est définie par son angle azimutal α et son angle polaire β , préserve le caractère bi-dimensionnel des modes critiques à condition de se placer dans le repère (OXYZ) obtenu par une rotation d'angle α autour de l'axe vertical (Oz) du repère initial de travail (Oxyz). Ce constat nous permet d'introduire une fonction de courant ϕ dans le plan (XOZ). Les équations d'évolution du problème perturbé (1)–(10) peuvent donc s'écrire dans ce plan (XOZ). Nous les écrivons pour un champ magnétique parfaitement vertical, sachant que pour un champ non vertical, nous avons montré que les seuils critiques restent inchangés en remplaçant Ha par $Ha \cos \beta$:

$$i\lambda \left(\frac{d^2}{dz^2} - k^2 \right) \phi + Pr \left[\left(\frac{d^2}{dz^2} - k^2 \right)^2 - Ha^2 \frac{d^2}{dz^2} \right] \phi - i k Ra Pr [(1 + \psi)\theta - \psi\eta] = 0 \quad (13)$$

$$i\lambda\theta + \left(\frac{d^2}{dz^2} - k^2 \right) \theta - ik\phi = 0 \quad (14)$$

$$i\lambda(\eta - \theta) + Le \left(\frac{d^2}{dz^2} - k^2 \right) \eta + ik\phi = 0 \quad (15)$$

avec les conditions aux limites suivantes :

$$\phi = \frac{d\phi}{dz} = 0, \quad \theta = 0 \quad \text{et} \quad \frac{d\eta}{dz} = 0 \quad \text{pour} \quad z = \pm 1 \quad (16)$$

Notons que, dans ces équations, nous avons conservé la notation z à la place de Z dès lors que les axes (OZ) et (Oz) sont confondus. Pour étudier les instabilités monocellulaires (sur lesquelles le champ magnétique a une influence d'après ce que nous avons vu dans le paragraphe précédent), nous utilisons le développement en série en puissances de k au voisinage de $k = 0$ des perturbations de la fonction de courant, de la température et de la fonction η , et nous faisons de même pour le taux d'amplification λ . Nous pouvons ainsi déterminer analytiquement pour ces instabilités monocellulaires les expressions du nombre de Rayleigh critique Ra_c en fonction du facteur de séparation ψ . Par ailleurs, nous sommes en mesure de déterminer le facteur de séparation limite ψ_ℓ qui donne la valeur de ψ en deçà de laquelle l'approximation monocellulaire n'est plus valable, c'est-à-dire qu'elle ne donne plus le mode dominant. Notons que l'obtention de Ra_c nécessite un développement en k à l'ordre 2, alors que l'ordre 4 est nécessaire pour obtenir ψ_ℓ . Les expressions obtenues à la suite de développements analytiques complexes réalisés avec le logiciel MAPLE sont présentées ci-dessous (notons qu'il est judicieux de définir un facteur de séparation généralisé $\tilde{\psi}$) :

$$Ra_c = \frac{12 Le Ha^4}{\psi (12 + Ha^2 - 6 Ha \coth \frac{Ha}{2})} \quad (17)$$

$$\tilde{\psi}_\ell = \frac{1}{Le} \frac{\psi_\ell}{1 + \psi_\ell} = \frac{N(Ha)}{D(Ha)} \quad (18)$$

avec :

$$\begin{aligned} N(Ha) = & -\frac{3}{2}(-40\,320 + 40\,320 \exp(3Ha) - 420 Ha^4 + 1680 Ha^3 \\ & - 120\,960 \exp(2Ha) - 17 Ha^6 + 10\,080 Ha^2 + 120\,960 \exp(Ha) \\ & - 168 Ha^5 - 10\,080 \exp(3Ha) Ha^2 - 20\,160 \exp(2Ha) Ha^2 \\ & + 17 Ha^6 \exp(3Ha) + 420 Ha^4 \exp(3Ha) + 420 Ha^4 \exp(2Ha) \\ & + 5040 Ha \exp(3Ha) - 51 Ha^6 \exp(2Ha) + 1680 Ha^3 \exp(3Ha) \\ & - 168 Ha^5 \exp(3Ha) - 1680 Ha^3 \exp(2Ha) - 5040 \exp(2Ha) Ha \\ & + 168 Ha^5 \exp(2Ha) + 20\,160 Ha^2 \exp(Ha) + 168 Ha^5 \exp(Ha) \\ & - 1680 Ha^3 \exp(Ha) - 5040 Ha \exp(Ha) + 5040 Ha \\ & - 420 Ha^4 \exp(Ha) + 51 Ha^6 \exp(Ha)) \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} D(Ha) = & Ha (504 Ha^3 + 6300 Ha^2 - Ha^5 + 30\,240 Ha \\ & - 21\,420 Ha^2 \exp(Ha) - 52\,920 \exp(Ha) - 30\,240 Ha \exp(3Ha) \\ & + 15\,120 \exp(2Ha) Ha + Ha^5 \exp(3Ha) - 504 Ha^3 \exp(3Ha) \\ & + 4032 Ha^3 \exp(2Ha) - 4032 Ha^3 \exp(Ha) + 52\,920 \exp(3Ha) \\ & + 3 Ha^5 \exp(Ha) - 3 Ha^5 \exp(2Ha) + 6300 \exp(3Ha) Ha^2 \\ & - 21\,420 \exp(2Ha) Ha^2 - 15\,120 Ha \exp(Ha) + 52\,920 (1 - \exp(2Ha))) \end{aligned} \quad (20)$$

Par un développement limité de ces expressions à l'ordre 4 en Ha , nous pouvons retrouver, à l'ordre zéro, les expressions classiques de Ra_c et ψ_ℓ pour les instabilités monocellulaires en l'absence de champ magnétique ($Ha = 0$) :

$$Ra_c = \frac{720 Le}{\psi} + \frac{120 Le}{7\psi} Ha^2 - \frac{Le}{49\psi} Ha^4 + O(Ha^6) \quad (21)$$

$$\tilde{\psi}_\ell = \frac{131}{34} + \frac{196\,867}{1\,577\,940} Ha^2 + \frac{58\,185\,319}{73\,232\,195\,400} Ha^4 + O(Ha^6) \quad (22)$$

et donc :

$$\psi_\ell(Ha = 0) = \psi_{\ell_0} = \frac{131 Le}{34 - 131 Le} \quad (23)$$

Sur la Fig. 9, nous présentons les courbes donnant les seuils critiques Ra_c pour l'instabilité monocellulaire pour différentes valeurs du nombre de Hartmann Ha et $Le = 0.01$. Ces courbes s'étendent sur le domaine ($\psi > 0, Ra > 0$), mais aussi sur le domaine ($\psi < 0, Ra < 0$). Pour chacune de ces courbes, nous donnons aussi, sous la forme d'un point noir, la

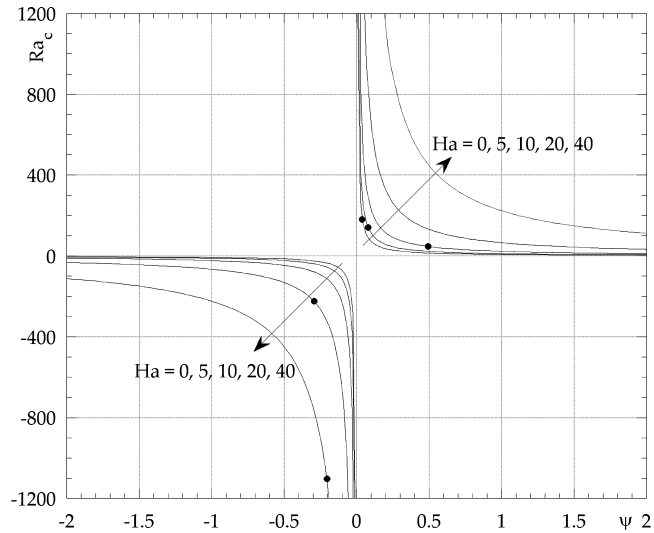


Fig. 9. Variation de Ra_c avec ψ pour $Le = 0.01$ et différentes valeurs de Ha .

Fig. 9. Variation of Ra_c with ψ for $Le = 0.01$ and different values of Ha .

Tableau 1

Variation en fonction de Ha de $\tilde{\psi}_\ell$, puis, pour $Le = 0.01$, variation de ψ_ℓ et du nombre de Rayleigh critique Ra_c correspondant.

Table 1

Variation of $\tilde{\psi}_\ell$ as a function of Ha , and then, for $Le = 0.01$, variation of ψ_ℓ and of the corresponding critical Rayleigh number Ra_c .

Ha	$\tilde{\psi}_\ell$	$Le = 0.01$	
		ψ_ℓ	Ra_c
0	3.853	0.0401	179.67
5	7.536	0.0815	139.57
10	33.080	0.494	46.69
20	-41.401	-0.293	-224.58
40	-25.419	-0.203	-1104.76

limite au-delà de laquelle le mode monocellulaire est le mode dominant. Les valeurs de ψ_ℓ correspondantes ainsi que les valeurs de Ra_c associées sont données dans le **Tableau 1**. Nous constatons tout d'abord que les seuils critiques $|Ra_c|$ pour l'instabilité monocellulaire croissent avec l'augmentation de Ha . Le facteur de séparation limite ψ_ℓ dépend aussi fortement de Ha : ψ_ℓ croît d'abord quand Ha augmente dans le domaine ($\psi > 0, Ra > 0$), puis décroît en valeur absolue dans le domaine ($\psi < 0, Ra < 0$). Ces variations indiquent que le domaine d'apparition des modes monocellulaires se restreint fortement quand Ha augmente. À titre d'exemple, ce domaine évolue des intervalles ($\psi > 0.0401, Ra > 0$) et ($\psi < 0, Ra < 0$) pour $Ha = 0$, à ($\psi > 0.494, Ra > 0$) et ($\psi < 0, Ra < 0$) pour $Ha = 10$ et à seulement ($-0.293 < \psi < 0, Ra < 0$) pour $Ha = 20$. L'ensemble de ces résultats confirme de façon plus précise ce qui a été observé dans la partie 3. D'un point de vue pratique, ce résultat est d'une importance majeure dès lors qu'il est désormais possible pour tout fluide caractérisé par un nombre de Lewis Le et un facteur de séparation ψ (permettant d'obtenir la valeur de $\tilde{\psi}$ correspondante) d'éviter l'apparition des instabilités monocellulaires préjudiciables à l'intensification des transferts thermiques et massiques en ajustant l'intensité du champ magnétique de façon à ce que $Ha \geq Ha_\ell$. Ha_ℓ est la valeur de Ha vérifiant la condition : $\tilde{\psi}_\ell(Ha_\ell) = \tilde{\psi} = \psi / [Le(1 + \psi)]$, où $\tilde{\psi}_\ell$ est explicitement déterminé par les relations analytiques (18)–(20). Quelques valeurs de Ha_ℓ peuvent être obtenues à partir du **Tableau 1**. Par exemple, pour $Le = 0.01$, $Ha_\ell = 5$ pour $\psi = 0.0815$ et $Ha_\ell = 10$ pour $\psi = 0.494$. Nous montrons aussi, dans le **Tableau 2**, les valeurs de Ha (notées Ha_n) qui correspondent à l'intensité du champ magnétique au-delà de laquelle l'instabilité monocellulaire n'apparaît que pour des facteurs de séparation ψ négatifs et un chauffage par le haut ($Ra < 0$). Une des conséquences est qu'au-delà de cette valeur, l'instabilité monocellulaire n'apparaît plus pour des ψ positifs. Le nombre de Hartmann Ha_n atteint une valeur limite proche de 13.5 lorsque le nombre de Lewis Le tend vers zéro et décroît lorsque la valeur de Le augmente.

5. Conclusion

Cette étude consacrée à l'effet d'un champ magnétique sur la stabilité de Rayleigh–Bénard avec effet Soret a principalement mis en évidence les points suivants :

Tableau 2

Valeurs de Ha_n au-delà desquelles l'instabilité monocellulaire n'apparaît que pour $\psi < 0$ et $Ra < 0$.

Table 2

Values of Ha_n above which the mono-cellular instability only appears for $\psi < 0$ and $Ra < 0$.

Le	Ha_n
0.0001	13.44249647
0.001	13.29867806
0.01	12.04102372
0.02	10.92902561
0.04	9.251004523
0.06	8.001913693
0.08	7.003098866
0.1	6.163030711
0.15	4.449488979
0.2	2.948319760

- Pour le cas $\psi < \psi_{\ell_0}$, les modes instables sont de longueur d'onde finie et le demeurent quand ils sont soumis à l'action d'un champ magnétique. L'effet stabilisant dû au champ magnétique est optimal quand ce dernier est parfaitement vertical, correspondant au cas $\beta = 0^\circ$. Toute variation de l'angle polaire β est à l'origine d'une atténuation de cet effet stabilisant, ce qui revient à remplacer l'intensité réelle du champ magnétique Ha par une intensité effective $Ha \cos \beta$. Après avoir réalisé cette transformation, tous les résultats relatifs à un champ magnétique d'angle azimutal α et d'angle polaire β se déduisent de ceux obtenus pour un champ magnétique parfaitement vertical ($\beta = 0^\circ$) avec les axes des cellules marginales alignés sur la composante horizontale du champ magnétique. Par ailleurs, pour un champ magnétique horizontal ($\beta = 90^\circ$), aucun effet de stabilisation, ni de modification du nombre d'onde critique, n'est constaté ($Ra_c = Ra_c(Ha = 0) = 1707.76$ et $\|\vec{k}_c\| = h_c(Ha = 0) = 3.11$), et la variation de l'angle azimutal α agit uniquement sur l'orientation des cellules marginales dont les axes s'alignent avec la direction du champ magnétique.
- Pour le cas $\psi \geq \psi_{\ell_0}$, le processus de stabilisation change radicalement. En effet, pour $Ha = 0$, l'instabilité correspond à un mode monocellulaire qui est peu favorable au transfert de masse et de chaleur. À l'instar de ce qui a été observé pour $\psi < \psi_{\ell_0}$, le champ magnétique conserve son effet stabilisant. Cependant, l'évolution des instabilités est différente. En effet, les instabilités, initialement monocellulaires pour $Ha = 0$, le demeurent jusqu'à un nombre de Hartmann $Ha_\ell(\psi, Le)$ pour lequel une variation marquée du nombre d'onde critique h_c a lieu. Pour $Ha = Ha_\ell(\psi, Le)$, ce dernier voit sa valeur passer subitement de zéro à des valeurs finies, avec pour conséquence directe la disparition des instabilités monocellulaires et l'apparition de nouveaux modes instables à plusieurs rouleaux. Cette modification a des conséquences pratiques de première importance dès lors que les modes à plusieurs rouleaux contribuent à l'intensification des transferts thermiques et massiques. Par ailleurs, la valeur du nombre de Hartmann $Ha_\ell(\psi, Le)$ qui assure cette optimisation des transferts a pu être calculée analytiquement et est donnée par les relations (18)–(20), comme indiqué dans la partie 4 de l'article.

Pour conclure, on peut affirmer que les aspects de l'action d'un champ magnétique sur les instabilités de Rayleigh–Bénard avec effet Soret sont multiples et que son impact pratique le plus significatif reste le contrôle sélectif des phénomènes de transfert de masse et de chaleur qui se développent au sein de la couche fluide.

Références

- [1] U. Burr, U. Müller, Rayleigh–Bénard convection in liquid metal layer under the influence of a horizontal magnetic field, *J. Fluid Mech.* 453 (2002) 345–369.
- [2] M. Takashima, M. Hirasawa, H. Nozaki, Buoyancy driven instability in a horizontal layer of electrically conducting fluid in the presence of a vertical magnetic field, *Int. J. Heat Mass Transf.* 42 (1999) 1689–1706.
- [3] M.K. Achour, S. Kaddeche, A. Gharbi, H. Ben Hadid, D. Henry, On the stability of the Hadley flow under the action of an acoustic wave, *Fluid Dyn. Mater. Proc.* 1 (4) (2005) 277–283.
- [4] C. Benzyd, S. Kaddeche, A. Abdennadher, D. Henry, H. Ben Hadid, Instabilités de Rayleigh–Bénard sous vibrations hautes fréquences et champ magnétique, *C. R., Méc.* 337 (5) (2009) 291–296.
- [5] S. Kaddeche, D. Henry, T. Putelat, H. Ben Hadid, Instabilities in liquid metals controlled by constant magnetic field, Part I: vertical magnetic field, *J. Cryst. Growth* 242 (2002) 491–500.
- [6] S. Kaddeche, H. Ben Hadid, T. Putelat, D. Henry, Instabilities in liquid metals controlled by constant magnetic field, Part II: horizontal magnetic field, *J. Cryst. Growth* 242 (2002) 501–510.
- [7] J. Hu, H. Ben Hadid, D. Henry, Linear stability analysis of Poiseuille–Rayleigh–Bénard flows in binary fluids with Soret effect, *Phys. Fluids* 19 (2007) 034101.
- [8] A. Mojtabi, J.K. Platten, M.-C. Charrier-Mojtabi, Onset of free convection in solutions with variable Soret coefficients, *J. Non-Equilib. Thermodyn.* 27 (2002) 25–44.
- [9] K. Julien, E. Knobloch, S.M. Tobias, Nonlinear magnetoconvection in the presence of strong oblique fields, *J. Fluid Mech.* 410 (2000) 285–322.