

# Influence de l'acoustic streaming sur la stabilité d'une couche de fluide isotherme ou chauffée latéralement

Walid Dridi \*, Daniel Henry, Hamda BenHadid

Laboratoire de Mécanique des Fluides et d'Acoustique, UMR CNRS 5509, École Centrale de Lyon/Université Claude-Bernard Lyon 1/  
INSA de Lyon, ECL, 36, avenue Guy-de-Collongue, 69134 Ecully Cedex, France

Reçu le 30 juillet 2006 ; accepté après révision le 7 février 2007

Disponible sur Internet le 23 mars 2007

Présenté par René Moreau

## Résumé

Nous étudions la stabilité linéaire d'un écoulement créé par des ondes ultrasons (Eckart streaming) dans une couche fluide entre deux plaques planes horizontales infinies, dans le cas d'un fluide isotherme ainsi que dans le cas d'un fluide chauffé latéralement. Les profils de base ont été déterminés analytiquement, et le problème aux valeurs propres découlant des équations perturbées a été résolu par une méthode spectrale Tau Chebyshev. Dans le cas isotherme, un paramètre acoustique critique  $A_c$ , seuil de déclenchement d'une instabilité oscillatoire, a pu être mis en évidence.  $A_c$  est minimum pour une largeur de faisceau acoustique (ramenée à la hauteur de la couche fluide)  $H_s = 0,32$  et augmente lorsque  $H_s$  s'écarte de cette valeur. L'autre résultat concerne l'influence de l'écoulement dû à l'acoustic streaming sur la stabilité de l'écoulement dû au chauffage latéral (écoulement de Hadley). Pour des largeurs de faisceau acoustique assez petites, l'écoulement dû à l'acoustic streaming déstabilise prématurément l'écoulement de Hadley. Par contre, pour des faisceaux assez larges ( $H_s > 0,6$ ), il existe un domaine de valeurs du paramètre acoustique sur lequel l'écoulement de Hadley est stabilisé (croissance des seuils), avant une forte décroissance des seuils pour de plus grandes valeurs de  $A$ . Soulignons que la stabilité de ce type d'écoulement n'a encore jamais été abordée dans la littérature.

**Pour citer cet article :** W. Dridi et al., *C. R. Mecanique* 335 (2007).

© 2007 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

## Abstract

**Influence of acoustic streaming on the stability of an isothermal or laterally heated fluid layer.** The linear stability of acoustic streaming flows induced by ultrasound waves (Eckart streaming), for both isothermal and laterally heated fluids confined between two parallel horizontal infinite walls has been studied. The basic profiles were determined analytically, and the eigenvalue problem derived for the temporal stability analysis was solved by a spectral Tau Chebyshev method. In the isothermal case, a critical acoustic parameter  $A_c$  leading to an oscillatory instability was determined.  $A_c$  is minimum for an acoustic beam width (normalized by the height of the fluid layer)  $H_s = 0.32$  and increases when either  $H_s$  is decreased or increased. The other result concerns the influence of the acoustic streaming flow on the stability of the laterally heated layer (Hadley flow). For rather small beam widths, the acoustic streaming flow destabilizes the Hadley flow, but for large beam widths ( $H_s > 0.6$ ), a range of acoustic parameter values was found for which the Hadley flow is stabilized (increase of the thresholds), before a sharp decrease of the thresholds for larger  $A$ . Let us underline that the stability of such flows has not been yet studied in the literature. **To cite this article:** W. Dridi et al., *C. R. Mecanique* 335 (2007).

\* Auteur correspondant.

Adresses e-mail : [walid.dridi@ec-lyon.fr](mailto:walid.dridi@ec-lyon.fr) (W. Dridi), [daniel.henry@ec-lyon.fr](mailto:daniel.henry@ec-lyon.fr) (D. Henry), [hamda.benhaidid@univ-lyon1.fr](mailto:hamda.benhaidid@univ-lyon1.fr) (H. BenHadid).

© 2007 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

*Mots-clés* : Mécanique des fluides numérique ; Stabilité ; Convection naturelle ; Acoustic streaming

*Keywords* : Computational fluid mechanics; Stability; Buoyant flow; Acoustic streaming

## Abridged English version

We consider an incompressible, Newtonian fluid in a layer of thickness  $H$  between two infinite horizontal walls. This layer is subject to a horizontal temperature gradient  $\nabla \tilde{T}$  along  $x$  and to a constant radiation pressure caused by an ultrasonic beam applied in the same direction (Eckart streaming). The dimensionless equations of the problem are given by (1)–(3). In these equations,  $Gr$  is the Grashof number ( $Gr = g\beta\nabla\tilde{T}H^4/\nu^2$ ),  $Pr$  is the Prandtl number ( $Pr = \nu/\kappa$ ), and  $A$  is an acoustic parameter defined as  $A = \alpha V_a^2 H^3/\nu^2$ , where  $\alpha$  is the acoustic absorption coefficient and  $V_a$  is the amplitude of the acoustic velocity oscillation. In our study, the layer is considered as infinite in both longitudinal  $x$  and transverse  $y$  directions, and a stationary parallel flow solution only depending on the vertical coordinate  $z$  can be found. The stability of this basic flow shown in Figs. 1–3 is then investigated by a temporal linear analysis. The perturbations verify the linear system (4)–(6) which after the expansion of the perturbations as normal modes leads to an eigenvalue problem solved by a spectral Tau Chebyshev method. The stability of the pure acoustic streaming flow has been first studied for different normalized widths  $H_s$  of the acoustic beam. The neutral stability curve giving the evolution of the critical acoustic parameter  $A_c$  as a function of  $H_s$  is shown in Fig. 4. The neutral curve which corresponds to the onset of oscillatory two-dimensional instabilities has a minimum for  $H_s = 0.32$  and the thresholds increase for both smaller and higher values of  $H_s$ . The increase for large  $H_s$  is particularly strong, indicating that the streaming flows induced by large beam widths are particularly stable. The action of the ultrasonic beam on the two-dimensional steady instabilities occurring in a laterally heated layer at small values of  $Pr$  (here  $Pr = 0.01$ ) is shown in Fig. 5. The neutral stability curves give the evolution of  $Gr_c$  with  $A$  for different values of  $H_s$ . For  $A = 0$ , the pure thermal thresholds are obtained. From Fig. 5, we see that for values of  $H_s$  lower than 0.6, the ultrasound waves cause a strong decrease of  $Gr_c$ , thus contributing to destabilize the basic flow. For higher values of  $H_s$ , the value of  $Gr_c$  first increases, then reaches a maximum and finally strongly decreases. A range of  $A$  values in which the Hadley flow is stabilized by the ultrasound waves is thus determined in this case. In any case, the curves eventually cut the  $Gr = 0$  axis at a value of  $A$  corresponding to that previously found in the case of the isothermal fluid. These instabilities are oscillatory and connected to the shear zones appearing in the basic flow profiles.

## 1. Introduction

La propagation d'ondes acoustiques dans un fluide peut entraîner la création d'un écoulement stationnaire à grande échelle connu sous le nom d'acoustic streaming [1]. On peut distinguer deux types d'acoustic streaming : l'Eckart streaming [2] pour lequel le mouvement est créé au sein du fluide par les tensions de Reynolds résultant du passage de l'onde acoustique, et le Rayleigh streaming [3] où ces tensions de Reynolds agissent dans les couches limites acoustiques qui se développent le long des parois solides. L'acoustic streaming est utilisé dans des situations variées, par exemple en micro-fluidique, pour réaliser du mélange chaotique, pour favoriser les transferts de masse et de chaleur, pour améliorer la croissance cristalline à travers le contrôle des écoulements au sein des bains fondus. C'est cette dernière application qui est à l'origine de nos travaux. Dans notre étude, nous nous intéresserons à l'écoulement de type Eckart streaming, également connu sous le nom de Quartz Wind, qui est lié à la dissipation de l'énergie acoustique au sein du fluide et qui entraîne la mise en mouvement du fluide dans le faisceau d'ultrasons. Les profils de vitesse dûs à l'Eckart streaming ont déjà été déterminés analytiquement pour un tube cylindrique en supposant la conservation du débit par Eckart [2] et Rudenko [4]. Nous utilisons le même type d'approche pour déterminer le profil analytique dans le cas plus simple d'une couche infinie entre deux plaques planes horizontales. Ce profil servira à l'étude de la stabilité des écoulements d'acoustic streaming à travers la détermination d'un paramètre acoustique critique  $A_c$  pour différentes largeurs de la source ultrason. Mais nous chercherons aussi à comprendre comment l'écoulement dû aux ondes ultrasons peut modifier la stabilité de l'écoulement induit par un chauffage latéral, écoulement typique des écoulements existant dans les bains fondus. Pour cela, nous allons déterminer les solutions analytiques des écoulements générés par ces deux effets combinés dans une couche infinie. Puis nous étudierons leur stabilité en déterminant le

nombre de Grashof critique  $Gr_c$  en fonction du paramètre acoustique  $A$  pour différentes largeurs de la source ultrason. Pour  $A = 0$ , notre problème se ramène à un cas de convection naturelle classique, dit écoulement de Hadley, dont la stabilité a été largement étudiée dans la littérature [5,6].

## 2. Modélisation et équations

### 2.1. Équations de base

Considérons une couche fluide incompressible d'épaisseur  $H$  contenue entre deux plaques planes infinies horizontales. Cette couche fluide est soumise à un gradient de température horizontal  $\nabla \tilde{T}$  et à un faisceau d'ondes ultrasons de largeur  $H_b < H$ , centré dans l'épaisseur de la couche et se propageant dans la direction horizontale  $x$ . Le fluide est considéré comme Newtonien, de viscosité cinématique  $\nu$  et de diffusivité thermique  $\kappa$  constantes. En se basant sur l'approximation de Boussinesq, la densité du fluide est considérée comme constante, sauf dans le terme de gravité où elle varie linéairement avec la température ( $\rho = \rho_0(1 - \beta(\tilde{T} - \tilde{T}_0))$ ), avec  $\tilde{T}_0$  la température de référence et  $\beta$  le coefficient d'expansion thermique). L'action de l'onde acoustique, qui s'exerce à travers la création d'un gradient de pression de radiation acoustique, se ramène à un terme de force constant selon  $x$  dans la largeur du faisceau.  $H$ ,  $H^2/\nu$ ,  $\nu/H$ ,  $\rho_0\nu^2/H^2$  et  $\nabla \tilde{T}H$  sont les quantités de référence pour respectivement les longueurs, le temps, la vitesse, la pression et la température. Les équations de base adimensionnées sont alors :

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} = -\nabla P + \nabla^2 \mathbf{V} + Gr T \mathbf{e}_z + A \delta_b \mathbf{e}_x \quad (2)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla T) = \frac{1}{Pr} \nabla^2 T \quad (3)$$

avec  $\mathbf{V} = (U, V, W)$ . Les paramètres du problème sont le nombre de Grashof  $Gr = g\beta\nabla\tilde{T}H^4/\nu^2$ , le nombre de Prandtl  $Pr = \nu/\kappa$  et le paramètre acoustique  $A = \alpha V_a^2 H^3/\nu^2$ , où  $\alpha$  est le coefficient d'absorption de l'onde acoustique et  $V_a$  est l'amplitude d'oscillation de la vitesse acoustique.  $A$  correspond aussi à la pression de radiation acoustique adimensionnée.  $\delta_b$  est une fonction de la coordonnée verticale  $z$  et vaut 1 à l'intérieur du faisceau d'ondes ultrasons et 0 en dehors. Les conditions aux limites au niveau des plaques horizontales (situées à  $z = -1/2$  et  $z = 1/2$ ) sont des conditions d'adhérence pour la vitesse et des conditions parfaitement conductrices pour la température.

### 2.2. Détermination des profils de vitesse et de température de base

Pour une couche d'extension infinie, il existe une solution d'écoulement parallèle horizontal ne dépendant que de la direction  $z$  qui peut être déterminée analytiquement en considérant que le débit dans chaque section de la couche fluide est nul. Cette solution qui s'exprime à travers  $U_0(z)$  et  $T_0(x, z) = x + T_i(z)$  est définie par morceaux ci-dessous :

$$U_0(z) = \frac{Gr}{24}(4z^3 - z) - \frac{AH_s}{16}(2z + 1)[2(H_s^2 - 3)z - (H_s^2 + 1)] \quad \text{pour } -1/2 \leq z \leq -H_s/2$$

$$U_0(z) = \frac{Gr}{24}(4z^3 - z) - \frac{A}{16}(H_s - 1)^2[4(H_s + 2)z^2 - H_s] \quad \text{pour } -H_s/2 \leq z \leq H_s/2$$

$$U_0(z) = \frac{Gr}{24}(4z^3 - z) - \frac{AH_s}{16}(2z - 1)[2(H_s^2 - 3)z + (H_s^2 + 1)] \quad \text{pour } H_s/2 \leq z \leq 1/2$$

et

$$T_i(z) = \frac{Gr Pr}{5760}(48z^5 - 40z^3 + 7z) - \frac{Pr AH_s}{768}(2z + 1)^3[2(H_s^2 - 3)z - (3H_s^2 - 1)]$$

pour  $-1/2 \leq z \leq -H_s/2$

$$T_i(z) = \frac{Gr Pr}{5760}(48z^5 - 40z^3 + 7z) - \frac{Pr A}{768}(H_s - 1)^2[16(H_s + 2)z^4 - 24H_s z^2 + H_s(2H_s + 1)]$$

pour  $-H_s/2 \leq z \leq H_s/2$

$$T_i(z) = \frac{Gr Pr}{5760}(48z^5 - 40z^3 + 7z) - \frac{Pr AH_s}{768}(2z - 1)^3[2(H_s^2 - 3)z + (3H_s^2 - 1)]$$

pour  $H_s/2 \leq z \leq 1/2$

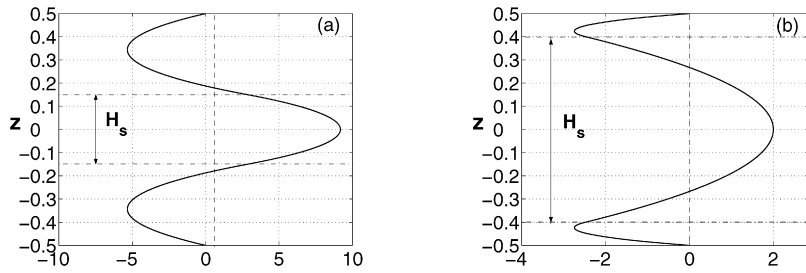


Fig. 1. Profils de vitesse de l'écoulement dû à l'Eckart streaming pour  $H_s = 0,3$  (a) et  $H_s = 0,8$  (b) ( $A = 1000$ ).

Fig. 1. Velocity profiles for the flow due to the Eckart streaming for  $H_s = 0.3$  (a) and  $H_s = 0.8$  (b) ( $A = 1000$ ).

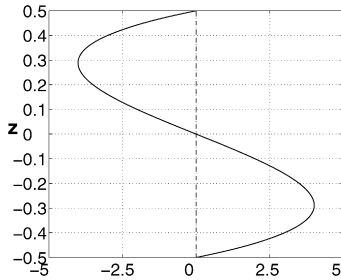


Fig. 2. Profil de vitesse de l'écoulement dû au gradient de température pour  $Gr = 500$ .

Fig. 2. Velocity profile for the flow due to the temperature gradient for  $Gr = 500$ .

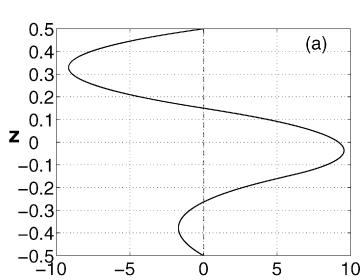
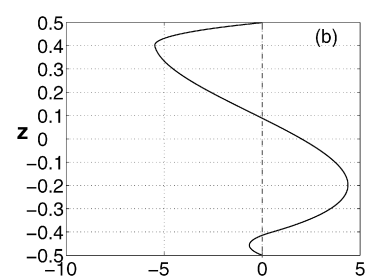


Fig. 3. Profils de vitesse de l'écoulement dû à l'effet combiné du gradient de température et de l'Eckart streaming pour  $H_s = 0,3$  (a) et  $H_s = 0,8$  (b) ( $Gr = 500, A = 1000$ ).

Fig. 3. Velocity profiles for the flow due to the combined effect of temperature gradient and Eckart streaming for  $H_s = 0.3$  (a) and  $H_s = 0.8$  (b) ( $Gr = 500, A = 1000$ ).



où  $H_s = (H_b/H) < 1$  est la largeur du faisceau acoustique adimensionnée. Les conditions parfaitement conductrices pour la température correspondent à  $T_0(x, z = \pm 1/2) = x$  et donc  $T_i(z = \pm 1/2) = 0$ .

On remarque que la vitesse, dans le cas d'un fluide isotherme (Fig. 1), est positive au centre de la couche en raison de la pression de radiation due à l'onde ultrason appliquée autour de cet endroit, et est négative dans les zones près des parois qui correspondent à des zones de retour de l'écoulement. La position des zéros de vitesse est liée à la conservation du débit dans la section : ils se trouvent à l'extérieur du faisceau acoustique pour des faisceaux étroits et à l'intérieur pour des faisceaux larges. Ces profils possèdent des changements de courbure aux limites inférieures et supérieures du faisceau et sont symétriques par rapport au centre de la couche. Le profil dû au gradient de température (Fig. 2) est le profil classique correspondant à une cubique avec un point d'inflexion au centre de la couche. Les profils dûs à l'influence combinée des deux effets (Fig. 3) sont plus complexes et ne présentent plus de symétries.

### 3. Stabilité linéaire

Nous voulons étudier la stabilité linéaire de l'écoulement de base induit par le gradient de température longitudinal et les ondes ultrasons. Pour cela, nous développons la solution du problème (1)–(3) sous la forme de petites perturbations autour de l'état de base :

$$(\mathbf{V}, P, T) = (\mathbf{V}_0, P_0, T_0) + (v, p, \theta)$$

Après introduction de ces variables dans les Éqs. (1)–(3) et linéarisation par rapport aux perturbations, nous obtenons le système linéaire aux perturbations suivant :

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \tag{4}$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{V}_0 \cdot \nabla) \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{V}_0 = -\nabla p + \nabla^2 \mathbf{v} + Gr \theta \mathbf{e}_z \tag{5}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + (\mathbf{V}_0 \cdot \nabla) \theta + (\mathbf{v} \cdot \nabla) T_0 = \frac{1}{Pr} \nabla^2 \theta \tag{6}$$

avec  $\mathbf{V}_0 = (U_0, 0, 0)$ , et  $\mathbf{u} = 0, \theta = 0$  comme conditions aux limites sur les plaques horizontales. Nous pouvons développer les perturbations en modes normaux :

$$(\mathbf{v}, p, \theta) = (\mathbf{v}, p, \theta)(z)e^{i(hx+ky)+st}$$

où  $h$  et  $k$  sont les nombres d'onde dans les directions longitudinales  $x$  et transverses  $y$ . L'analyse temporelle de stabilité se ramène à un problème aux valeurs propres complexes  $s = \sigma + i\omega$  résolu par une méthode spectrale Tau Chebyshev (des précisions sur la méthode sont données dans [6]). Les seuils de stabilité correspondent aux valeurs de paramètres pour lesquelles une valeur propre est marginale (partie réelle  $\sigma$  nulle) tandis que les autres valeurs propres ont des parties réelles négatives, mais ces seuils sont ensuite minimisés en fonction des nombres d'onde  $h$  et  $k$ .

L'intérêt principal de ce travail est d'étudier d'une part la stabilité de l'écoulement engendré par les ondes ultrasons (acoustic streaming), et d'autre part la stabilité de l'écoulement combiné induit par le gradient de température horizontal et les ondes ultrasons.

Dans un premier temps, nous allons nous intéresser aux instabilités bidimensionnelles ( $h \neq 0, k = 0$ ), correspondant à des rouleaux d'axes perpendiculaires à la direction de l'écoulement de base, pouvant affecter l'écoulement isotherme dû uniquement aux ondes ultrasons ( $Gr = 0$ ).

Dans un deuxième temps, nous nous intéresserons aux instabilités pouvant se développer dans les écoulements combinés et nous déterminerons la valeur critique du nombre de Grashof,  $Gr_c$ , en fonction du paramètre acoustique  $A$  pour différentes largeurs  $H_s$  du faisceau d'ultrasons. Nous avons choisi une valeur de  $Pr$  assez faible ( $Pr = 0,01$ ) pour laquelle, sans champ acoustique, se développe une instabilité stationnaire bidimensionnelle, instabilité bien décrite dans la littérature [5,6].

#### 4. Résultats et discussion sur la stabilité des écoulements dûs aux ondes acoustiques

##### 4.1. Stabilité linéaire dans le cas d'un écoulement isotherme

L'effet de la largeur de la source ultrason  $H_s$  sur la stabilité de l'écoulement isotherme engendré uniquement par les ondes ultrasons est présenté sur la Fig. 4(a) sous la forme d'une courbe critique donnant, en fonction de  $H_s$ , les valeurs critiques  $A_c$  au-dessus desquelles cet écoulement devient instable. On remarque l'influence nette de la largeur de la source sur la stabilité de l'écoulement. La valeur minimale de  $A_c$  est obtenue pour une valeur de  $H_s$  égale à 0,32. Cette valeur de  $H_s$  est celle qui donne le plus grand écart de vitesse ( $U_{max} - U_{min}$ ) dans l'écoulement de base. La Fig. 4(a) montre que  $A_c$  augmente lorsque  $H_s$  s'écarte de cette valeur avec une stabilisation particulièrement forte pour les fortes valeurs de  $H_s$ . L'instabilité mise en évidence est liée aux deux zones de cisaillement présentes dans l'écoulement de base aux limites du faisceau (Fig. 1). Ces zones de cisaillement se déplacent vers les parois lorsque  $H_s$  augmente. Mentionnons enfin que l'instabilité est oscillatoire et que sa fréquence, faible pour les petites valeurs de  $H_s$ , croît avec l'augmentation de  $H_s$  (Fig. 4(b)).

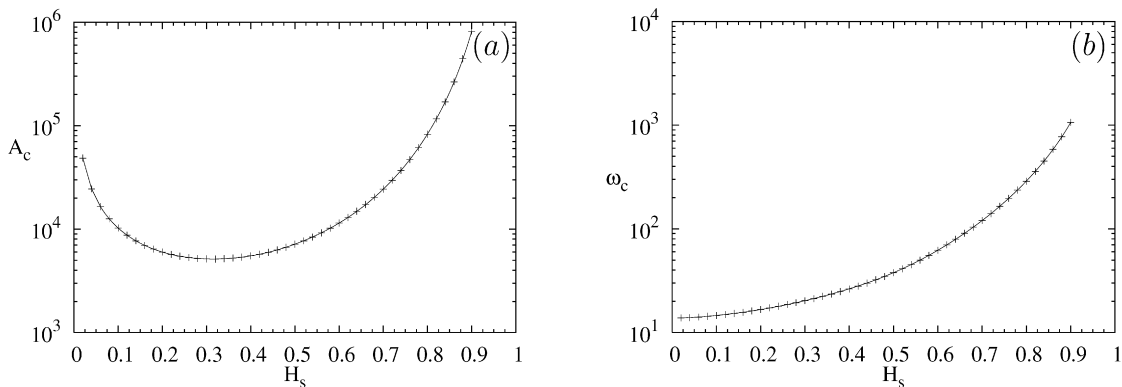


Fig. 4. Variation de  $A_c$  (a) et de la pulsation  $\omega_c$  (b) en fonction de  $H_s$  pour un fluide isotherme.

Fig. 4. Variation of  $A_c$  (a) and of the pulsation  $\omega_c$  (b) as a function of  $H_s$  for an isothermal fluid.

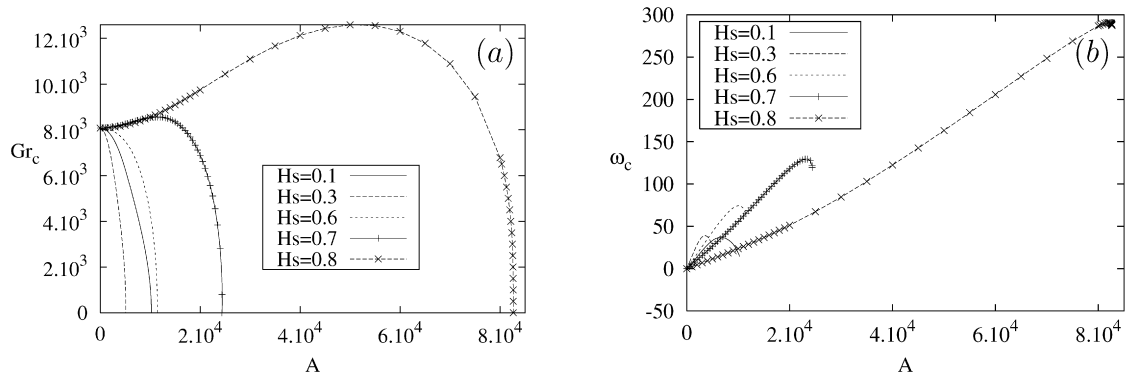


Fig. 5. Variation de  $Gr_c$  (a) et de la pulsation  $\omega_c$  (b) en fonction de  $A$  pour différentes valeurs de  $H_s$ .

Fig. 5. Variation of  $Gr_c$  (a) and of the pulsation  $\omega_c$  (b) as a function of  $A$  for different values of  $H_s$ .

#### 4.2. Stabilité linéaire dans le cas d'un écoulement chauffé

L'action des ondes ultrasons sur la stabilité de l'écoulement induit par un gradient de température longitudinal est présentée sur la Fig. 5 pour  $Pr = 0,01$  et différentes valeurs de  $H_s$ . Nous retrouvons pour  $A = 0$  l'instabilité stationnaire affectant l'écoulement induit par le gradient thermique (Fig. 2). L'évolution de la courbe de  $Gr_c$  en fonction de  $A$  pour différentes valeurs de  $H_s$  (Fig. 5(a)) montre que pour des valeurs de  $H_s$  inférieures à 0,6 l'augmentation du paramètre acoustique  $A$  fait baisser la valeur de  $Gr_c$ , contribuant ainsi à déstabiliser l'écoulement de base. Par contre, pour des valeurs de  $H_s$  supérieures à 0,6, la valeur de  $Gr_c$  commence par augmenter avec l'augmentation de  $A$ , atteint ensuite un maximum, puis entame une phase de décroissance rapide, déterminant ainsi tout un domaine de valeurs de  $A$  qui sont stabilisantes pour l'écoulement de base. Dans tous les cas, les courbes de  $Gr_c$  finissent par décroître et coupent l'axe  $Gr = 0$  pour des valeurs de  $A$  correspondant à celles trouvées précédemment dans le cas du fluide isotherme. L'instabilité est toujours d'origine dynamique et évolue, lorsque  $A$  augmente, d'une instabilité due au cisaillement du profil de vitesse thermique, localisée au centre, vers une instabilité due au cisaillement du profil de vitesse acoustique, localisée aux limites du jet acoustique. La pulsation critique  $\omega_c$  de la perturbation (Fig. 5(b)) part de 0 pour  $A = 0$ , croît ensuite fortement avec l'augmentation de  $A$  jusqu'à une valeur maximale, puis décroît pour atteindre la valeur de la pulsation obtenue dans le cas du fluide isotherme. Cette courbe montre clairement que l'instabilité bidimensionnelle, initialement stationnaire en absence d'acoustic streaming, devient oscillatoire dès lors que l'onde acoustique est appliquée.

#### Références

- [1] J. Lighthill, Acoustic streaming, *J. Sound Vibration* 61 (3) (1978) 391.
- [2] C. Eckart, Vortices and streams caused by sound waves, *Phys. Rev.* 73 (1) (1948) 68.
- [3] Lord Rayleigh, *The Theory of Sound*, MacMillan, London, 1929.
- [4] O.V. Rudenko, A.A. Sukhorukov, Nonstationary Eckart streaming and pumping of liquid in ultrasonic field, *Acoust. Phys.* 44 (1998) 653.
- [5] P. Laure, B. Roux, Synthèse des résultats obtenus par l'étude de stabilité des mouvements de convection dans une cavité horizontale de grande extension, *C. R. Acad. Sci. Paris* 305 (1987) 1137.
- [6] S. Kaddeche, D. Henry, H. BenHadid, Magnetic stabilization of the buoyant convection between infinite horizontal walls with a horizontal temperature gradient, *J. Fluid Mech.* 480 (2003) 185.